1, 2, 3. . .Sciences

Année académique 2011-2012

EXERCICES DE MATHÉMATIQUES
RÉPÉTITION 4 BIOLOGIE : CORRECTION

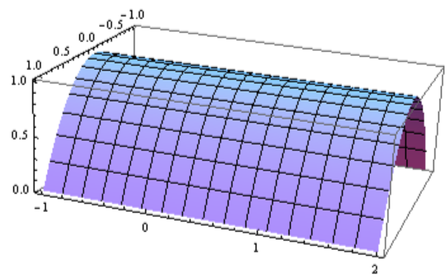
Version 23 février 2012

I. Volume d'un corps

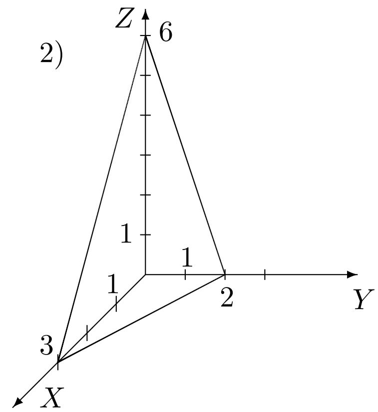
Calculer le volume des corps de l'espace décrits ci-dessous. Donner aussi une représentation graphique de ces corps.

1. **Corps borné par la surface d'équation cartésienne** $z = 1 - x^2$ **et les plans d'équation** $z = 0,\ y = -1$ **et** $y = 2$**.**
2. **Corps borné par les plans de coordonnées et la surface d'équation** $2x+3y+z = 6$
   Le volume du premier corps vaut 4 (unités de volume) et celui du deuxième vaut 6.
   Les représentations graphiques sont les suivantes :

1)



2)

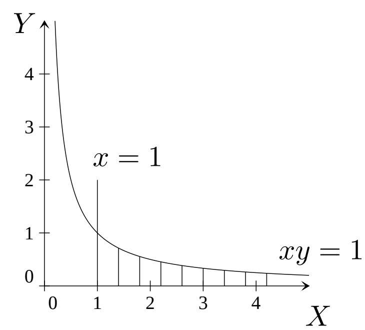


II. Intégration sur des ensembles non fermés bornés

1. **Si elles ont un sens, calculer les intégrales suivantes et représenter l'ensemble d'intégration.**

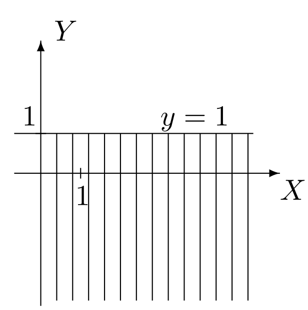
a) $\displaystyle\int\int_A \frac{1}{x}\, dx\, dy$ avec $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1,\ 0 \leq y \leq \frac{1}{x}\}$

La fonction est intégrable sur A et son intégrale vaut 1. L'ensemble d'intégration est l'ensemble hachuré ci-contre.



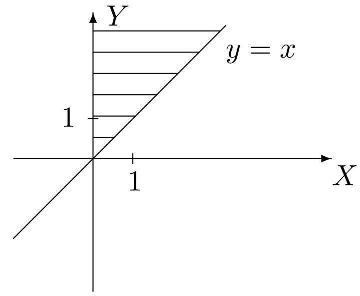
b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} \left(\int_0^{+\infty} e^{y-3x}\, dx \right) dy$

La fonction est intégrable sur $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,+\infty[,\ y \in]-\infty,1]\}$ et son intégrale vaut $\frac{e}{3}$. L'ensemble d'intégration est l'ensemble hachuré ci-contre.



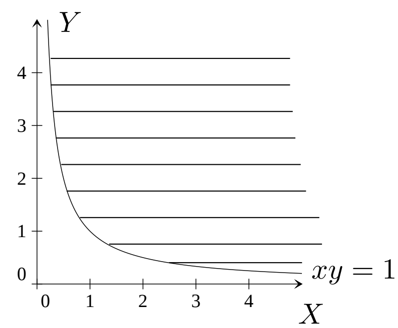
c) $\displaystyle\int\int_A e^{-y^2}\, dx\, dy \quad$ avec $\quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq y\}$

La fonction est intégrable sur A et son intégrale vaut $\dfrac{1}{2}$. L'ensemble d'intégration est l'ensemble hachuré ci-contre.



d) $\displaystyle\int\int_A x^3\, e^{-x^2 y}\, dx\, dy \quad$ avec $\quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ 1 \leq xy\}$

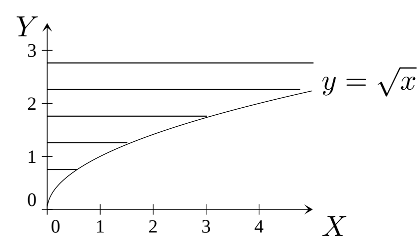
La fonction est intégrable sur A et son intégrale vaut 1. L'ensemble d'intégration est l'ensemble hachuré ci-contre.



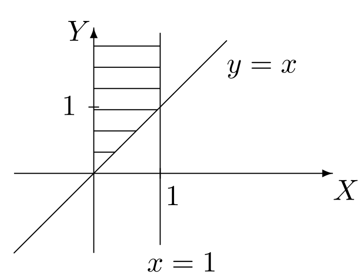
2. **Déterminer si les intégrales suivantes existent ; si oui, les calculer. Représenter géométriquement l'ensemble d'intégration dans chaque cas.**

$$a) \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{y^2} \frac{ye^{-y^2}}{x+y^2}\, dx\right) dy, \quad b) \int_0^1\left(\int_x^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2+y^2}\, dy\right) dx, \quad c) \int_0^1\left(\int_0^{x^2} \frac{1}{x+y}\, dy\right) dx$$

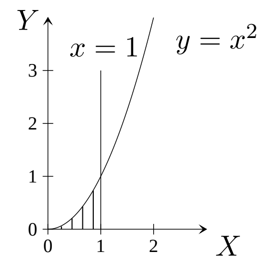
a) La fonction est intégrable sur $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in]0,+\infty[,\ x \in [0,y^2]\}$ et son intégrale vaut $\dfrac{1}{2}\ln 2$. L'ensemble d'intégration est l'ensemble hachuré ci-contre.



b) La fonction est intégrable sur $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in]0,1],\ y \in [x,+\infty[\}$ et son intégrale vaut $\dfrac{\pi}{2}$. L'ensemble d'intégration est l'ensemble hachuré ci-contre.

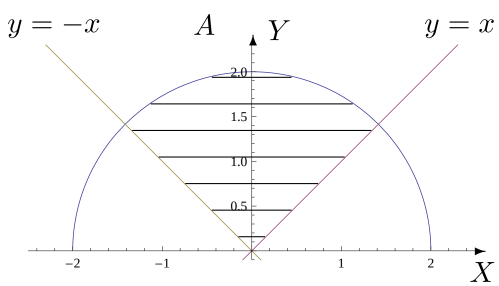


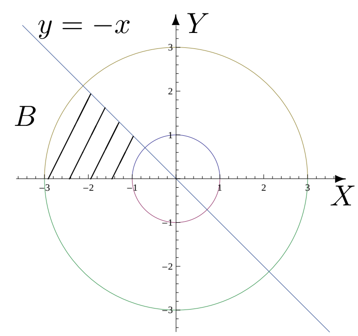
c) La fonction est intégrable sur $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in]0,1],\ y \in [0,x^2]\}$ et son intégrale vaut $2\ln 2 - 1$. L'ensemble d'intégration est l'ensemble hachuré ci-contre.



III. Intégration par changement de variables polaires

1. **Si elle existe, calculer**
   a) $\displaystyle\int\int_A \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$ où A est l'ensemble hachuré ci-dessous.
   b) $\displaystyle\int\int_B xy\,dx\,dy$ où B est l'ensemble hachuré ci-dessous.
   c) $\displaystyle\int\int_C (2x+y)\,dx\,dy$ où $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq \inf\{-x, \sqrt{1-x^2}\}\}$.





   Les 3 fonctions sont intégrables et les intégrales valent respectivement $\dfrac{4\pi}{3}$, -5 et $\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{2}\sqrt{2}$.

2. **Soit A une partie du plan (bornée et fermée). Le centre de masse de A (considéré homogène) est défini comme le point de coordonnées (x_A, y_A) où**
$$x_A = s^{-1}\int\int_A x\;dx\;dy, \quad y_A = s^{-1}\int\int_A y\;dx\;dy$$
   et où s est l'aire de la surface A.
   Déterminer la position du centre de masse d'une plaque homogène dont la forme est un tiers de cercle de rayon R (R réel strictement positif).

   La position du centre de masse est donnée par le point de coordonnées $\left(\dfrac{R\sqrt{3}}{2\pi}, \dfrac{3R}{2\pi}\right)$.

3. **Déterminer le volume du corps borné par la surface d'équation cartésienne $z = 9 - x^2 - y^2$ et par le plan d'équation $z = 0$.**

   Le volume du corps est $\dfrac{81\pi}{2}$ (unités de volume).