1, 2, 3...Sciences

Année académique 2011-2012

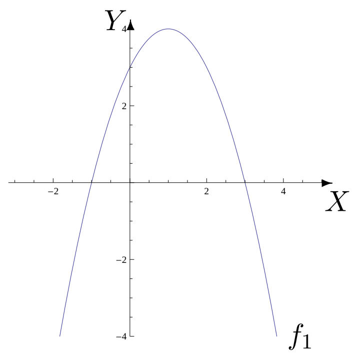
Exercices de mathématiques
Liste type numéro 5
Répétition 5 : correction

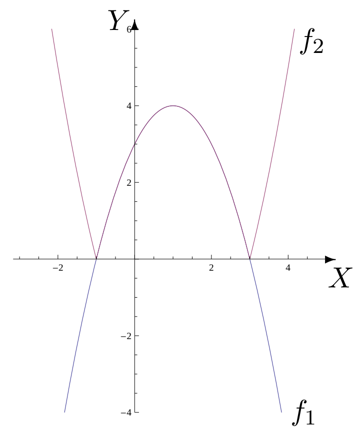
Version 14 septembre 2011(V1 : 29/08/09)

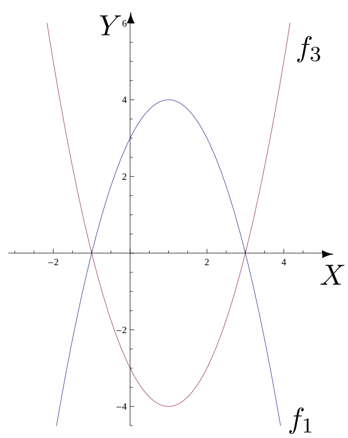
Exercices sur les éléments de base relatifs aux fonctions

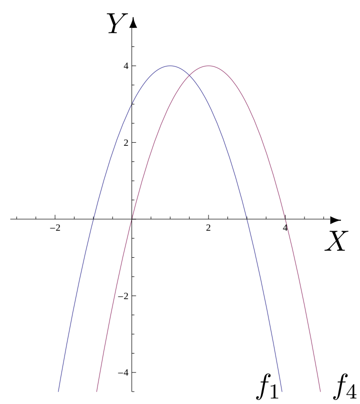
1. **Représenter graphiquement les fonctions données explicitement ci-dessous, toutes définies sur $\mathbb{R}$**

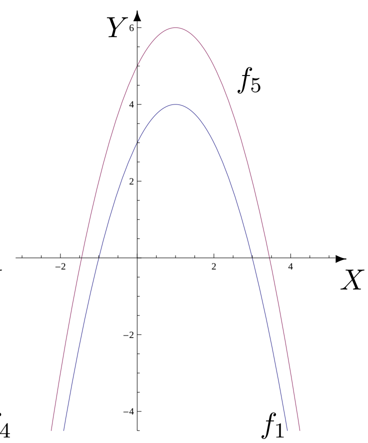
$$f_1(x) = -x^2 + 2x + 3, \quad f_2(x) = |-x^2 + 2x + 3|$$
$$f_3(x) = -f_1(x), \quad f_4(x) = f_1(x-1), \quad f_5(x) = f_1(x) + 2.$$







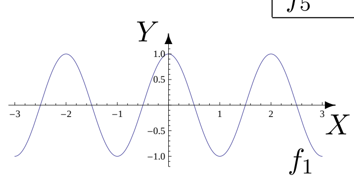


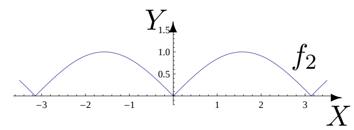


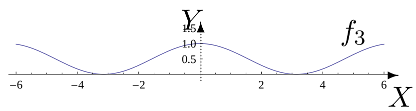
2. **Déterminer les domaines de définition, la parité, la périodicité et le graphique des fonctions données explicitement ci-dessous**

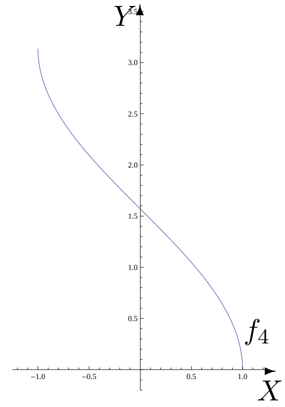
$f_1(x) = \cos(\pi x)$, $f_2(x) = |\sin x|$, $f_3(x) = \cos^2\left(\dfrac{x}{2}\right)$, $f_4(x) = \text{arcos}\, x$, $f_5(x) = \text{arcos}(\cos x)$.

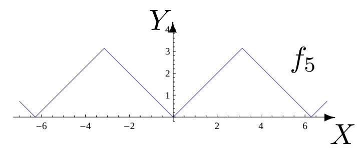
Fonction	dom(f)	Parité	Période
f_1	$\mathbb{R}$	pair	2
f_2	$\mathbb{R}$	pair	π
f_3	$\mathbb{R}$	pair	2π
f_4	$[-1, 1]$	—	non périodique
f_5	$\mathbb{R}$	pair	2π









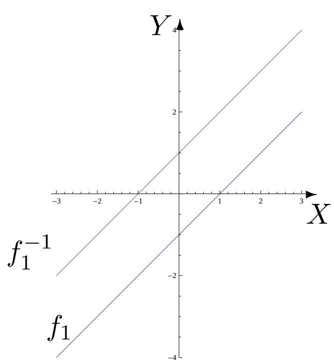


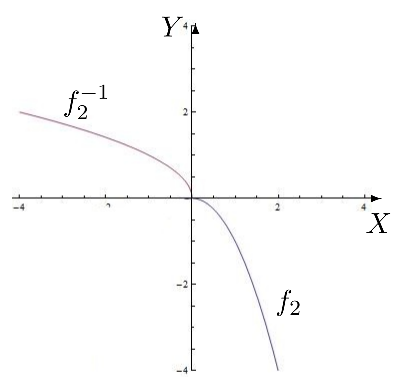
3. **Déterminer le domaine de définition des fonctions données explicitement ci-dessous, ainsi que leur image (x est une variable réelle). Dans chaque cas, déterminer la fonction inverse, si elle existe. Représenter alors f et son inverse dans le même repère orthonormé.**

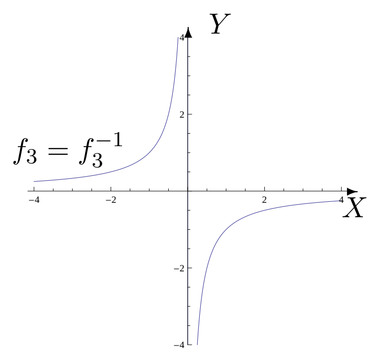
$$f_1(x) = x - 1, \quad f_2(x) = -x^2, \quad f_3(x) = \frac{-1}{x}.$$

Fonction	dom(f)	im(f)	Fonction inverse
f_1	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f_1^{-1} : x \mapsto x + 1$
f_2	$\mathbb{R}$	$]-\infty, 0]$	pas d'inverse (cf. ci-dessous)
f_3	$\mathbb{R}_0$	$\mathbb{R}_0$	$f_3^{-1} : x \mapsto -\frac{1}{x}$

Si on restreint le domaine de définition de f_2 à l'ensemble $[0, +\infty[$ par exemple alors la fonction admet une fonction inverse donnée par $f_2^{-1} :]-\infty, 0][\to [0, +\infty[\; x \mapsto \sqrt{-x}$.







4. **Déterminer le domaine de définition des fonctions données explicitement ci-dessous. Si la fonction est composée, mentionner de quelles fonctions élémentaires elle est la composée**

$$\frac{1}{2 - |x+1|}, \quad \ln(-x^2 - 2x + 3), \quad \sqrt{\frac{x-1}{x-2}}, \quad \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-2}}, \quad \ln(e^x - 1)$$

$$\ln\left(\sqrt{1+x^2}-x\right),\quad \arcsin(x^2-1),\quad \operatorname{arcotg}(\ln x)$$

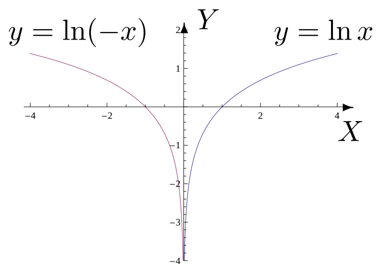
Fonction	dom(f)
$\frac{1}{2-\lvert x+1\rvert}$	$\mathbb{R}\setminus\{-3,\ 1\}$
$\ln(-x^2-2x+3)$	$]-3,1[$
$\sqrt{\frac{x-1}{x-2}}$	$]-\infty,1]\cup\ ]2,+\infty[$
$\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-2}}$	$]2,+\infty[$
$\ln(e^x-1)$	$]0,+\infty[$
$\ln\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)$	$\mathbb{R}$
$\arcsin(x^2-1)$	$[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$
$\operatorname{arcotg}(\ln x)$	$]0,+\infty[$

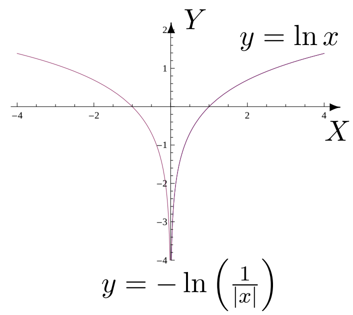
Si la fonction donnée est égale à $f\circ g$ alors on a
- pour $x\mapsto \frac{1}{2-|x+1|}$: les fonctions $g : x\mapsto 2-|x+1|$ et $f : y\mapsto \frac{1}{y}$
- pour $x\mapsto \ln(-x^2-2x+3)$: les fonctions $g : x\mapsto -x^2-2x+3$ et $f : y\mapsto \ln(y)$
- pour $x\mapsto \sqrt{\frac{x-1}{x-2}}$: les fonctions $g : x\mapsto \frac{x-1}{x-2}$ et $f : y\mapsto \sqrt{y}$
- pour $x\mapsto \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-2}}$: le numérateur est la composée des fonctions $g : x\mapsto x-1$ et $f : y\mapsto \sqrt{y}$ et le dénominateur est la composée des fonctions $g : x\mapsto x-2$ et $f : y\mapsto \sqrt{y}$
- pour $x\mapsto \ln(e^x-1)$: les fonctions $g : x\mapsto e^x-1$ et $f : y\mapsto \ln(y)$
- pour $x\mapsto \ln\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)$: les fonctions $g : x\mapsto \sqrt{1+x^2}-x$ et $f : y\mapsto \ln(y)$; la fonction $x\mapsto\sqrt{1+x^2}$ est elle même la composée des fonctions $x\mapsto 1+x^2$ et $y\mapsto\sqrt{y}$
- pour $x\mapsto \arcsin(x^2-1)$: les fonctions $g : x\mapsto x^2-1$ et $f : y\mapsto \arcsin(y)$
- pour $x\mapsto \operatorname{arcotg}(\ln x)$: les fonctions $g : x\mapsto \ln x$ et $f : y\mapsto \operatorname{arcotg}(y)$

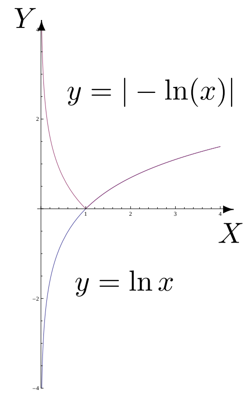
5. **Déterminer le domaine de définition des fonctions données explicitement ci-dessous et les représenter graphiquement (uniquement en se servant des symétries et des représentations graphiques de $\ln$ et de l'exponentielle).**

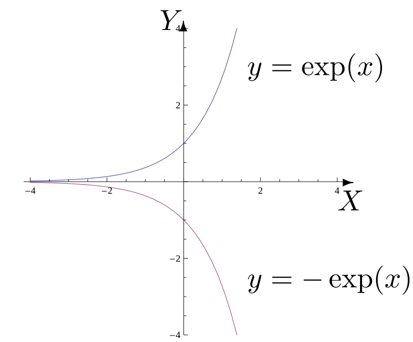
$$\ln(-x),\quad -\ln\left(\frac{1}{|x|}\right),\quad |-\ln(x)|,\quad -\exp(x),\quad \exp(x+1),\quad (\exp x)+1.$$

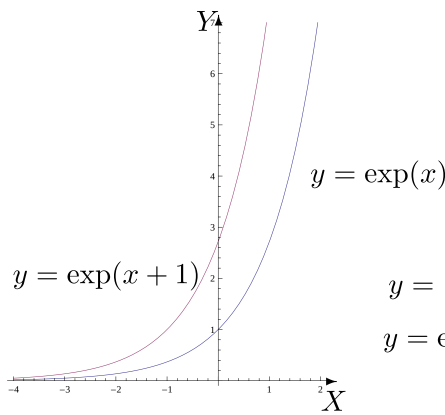
Le domaine de définition de la première fonction est $]-\infty,0[$; celui de la deuxième est $\mathbb{R}_0$ et celui de la troisième est $]0,+\infty[$.
Le domaine de définition des 3 fonctions exponentielles est $\mathbb{R}$.

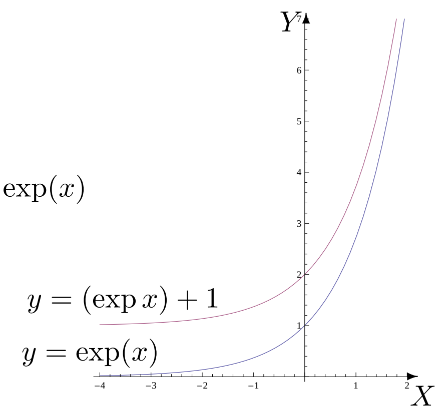

$y = \ln(-x)$
Y
$y = \ln x$
X


Y
$y = \ln x$
X
$y = -\ln\left(\frac{1}{|x|}\right)$


Y
$y = |-\ln(x)|$
X
$y = \ln x$


Y
$y = \exp(x)$
X
$y = -\exp(x)$


Y
$y = \exp(x)$
$y = \exp(x+1)$
X


Y
$y = (\exp x) + 1$
$y = \exp(x)$
X