1, 2, 3...Sciences

Année académique 2011-2012

Exercices de mathématiques
Liste type numéro 5 (tous sauf Bio) : correction

Version 27 février 2012

I. Opérations entre matrices

1. **Soient les matrices A, B, C données par**

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & i \\ 1+i & -1 \\ \frac{3}{i} & (2-i)^2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \\ i & -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & \frac{1}{i+1} \\ -2i & \frac{i}{2} \end{pmatrix}.$$

Si possible, effectuer les opérations suivantes (et simplifier la réponse au maximum). Si cela ne l'est pas, en expliquer la raison.

$$A+B,\ A+\widetilde{B},\ A.B,\ A.B+C,\ B.A,\ C.\widetilde{A},\ A^*.C,\ i.C,\ (i.A)^*.$$

- $A+B$ est impossible à calculer car les matrices n'ont pas le même format.
- $A+\widetilde{B} = \begin{pmatrix} 4 & 2+i & -2i \\ i & 3 & 1-4i \end{pmatrix}$
- $A.B = \begin{pmatrix} 8+i & 4+10i \\ 3+5i & -10+8i \end{pmatrix}$
- $A.B+C = \begin{pmatrix} 11+i & \frac{9+19i}{2} \\ 3+3i & \frac{-20+17i}{2} \end{pmatrix}$
- $B.A = \begin{pmatrix} 4 & 2+2i & -6i \\ 2+4i & -3+i & 12-19i \\ 0 & 1+i & -3+8i \end{pmatrix}$
- $C\widetilde{A}$ est impossible à calculer car le nombre de colonnes (2) de C n'est pas égal au nombre de lignes (3) de $\widetilde{A}$.
- $A^*C = \begin{pmatrix} 4 & \frac{3}{2}-i \\ 3-i & -\frac{3i}{2} \\ 8+3i & \frac{-1+6i}{2} \end{pmatrix}$
- $iC = \begin{pmatrix} 3i & \frac{1+i}{2} \\ 2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$
- $(iA)^* = \begin{pmatrix} -2i & -1 \\ -1-i & i \\ 3 & 4-3i \end{pmatrix}$

2. **Soit A une matrice carrée de dimension 3 telle que $A_{ij} = 1, \forall i,j$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.**

Calculer $C = AB - BA$ et en déduire la forme de $\widetilde{C} + C$.

On a $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\widetilde{C} + C$ est la matrice nulle de dimension 3.

3. **On donne la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $A^2 - 2A + 3I = 0$.**

4. **Déterminer la forme générale des matrices qui commutent avec**

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ **b)** $B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ $(a, b \in \mathbb{C})$

La forme générale des matrices qui commutent avec A est du type $\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}$ $(a, b \in \mathbb{C})$.

La forme générale des matrices qui commutent avec B est du type $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ $(\alpha,\ \beta \in \mathbb{C})$

si $a \neq b$.
Si $a = b$ alors toute matrice de dimension 2 commute avec B car B est dans ce cas un multiple de la matrice identité.

II. Déterminants

1. **Calculer le plus rapidement possible le déterminant de chacune des matrices suivantes.**

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2-i & 3i \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2i \\ (i+1)^2 & 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 6 \\ 6 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -6 \end{pmatrix},$$

$$D = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 3 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & \sin^2 a & \cos^2 a \\ 1 & \sin^2 b & \cos^2 b \\ 1 & \sin^2 c & \cos^2 c \end{pmatrix} \ (a, b, c \in \mathbb{R}).$$

Le déterminant de A vaut $\frac{1}{9}(8-i)$, celui de B vaut 1, celui de C vaut 90, celui de D vaut $-\frac{7}{2}$ et celui de E est nul.

2. **Le déterminant de chacune des matrices suivantes est un polynôme en $x \in \mathbb{C}$. Factoriser ce polynôme en un produit de facteurs du premier degré.** [1]

$$A = \begin{pmatrix} i & x+2 \\ -x & -i \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} x & -4 \\ 1 & x \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} x & 0 & 3 \\ 0 & x+1 & x \\ 1 & 0 & x-2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & x & 0 & 0 & 0 \\ x & x & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & x & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & x & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & x \end{pmatrix}.$$

On a

$$\det A = (x+1)^2, \ \det B = (x+2i)(x-2i), \ \det C = (x+1)^2(x-3) \ \text{ et } \det D = -x^2(x+2)(x-1)^2.$$

III. Inversion de matrices

Calculer (si elle existe) la matrice inverse de chacune des matrices suivantes (on donne $\alpha \in \mathbb{R}$).

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \cos\alpha & -\sin\alpha \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ i & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & -i \\ 0 & -1 & 1 \\ i & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

• L'inverse de la première matrice est $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
• La deuxième matrice ne possède pas d'inverse car son déterminant est nul.
• La troisième matrice est égale à son inverse.

1. D pas pour les géologues.

- L'inverse de la quatrième matrice est $\frac{1+i}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ i & i & 1 \\ i & 1 & 1 \end{pmatrix}$
- L'inverse de la cinquième matrice est $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -i & -i \\ i & -1 & 1 \\ i & 1 & 1 \end{pmatrix}$