
Université
de Liège



1, 2, 3...Sciences

Année académique 2011-2012

EXERCICES DE MATHÉMATIQUES
RÉPÉTITION 5 BIOLOGIE : CORRECTION

I. Opérations entre matrices

1. Soient les matrices A, B, C données par

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & i \\ 1+i & -1 \\ \frac{3}{i} & (2-i)^2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \\ i & -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & \frac{1}{i+1} \\ -2i & \frac{i}{2} \end{pmatrix}.$$

Si possible, effectuer les opérations suivantes (et simplifier la réponse au maximum). Si cela ne l'est pas, en expliquer la raison.

$$A+B, A+\tilde{B}, A.B, A.B+C, B.A, C.\tilde{A}, A^*.C, i.C, (i.A)^*.$$

• $A+B$ est impossible à calculer car les matrices n'ont pas le même format.

$$\bullet A + \tilde{B} = \begin{pmatrix} 4 & 2+i & -2i \\ i & 3 & 1-4i \end{pmatrix} \quad \bullet A.B = \begin{pmatrix} 8+i & 4+10i \\ 3+5i & -10+8i \end{pmatrix}$$

$$\bullet A.B+C = \begin{pmatrix} 11+i & \frac{9+19i}{2} \\ 3+3i & \frac{-20+17i}{2} \end{pmatrix} \quad \bullet B.A = \begin{pmatrix} 4 & 2+2i & -6i \\ 2+4i & -3+i & 12-19i \\ 0 & 1+i & -3+8i \end{pmatrix}$$

• $C\tilde{A}$ est impossible à calculer car le nombre de colonnes (2) de C n'est pas égal au nombre de lignes (3) de \tilde{A} .

$$\bullet A^*.C = \begin{pmatrix} 4 & \frac{3}{2}-i \\ 3-i & -\frac{3i}{2} \\ 8+3i & \frac{-1+6i}{2} \end{pmatrix} \quad \bullet iC = \begin{pmatrix} 3i & \frac{1+i}{2} \\ 2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\bullet (iA)^* = \begin{pmatrix} -2i & -1 \\ -1-i & i \\ 3 & 4-3i \end{pmatrix}$$

2. Soit A une matrice carrée de dimension 3 telle que $A_{ij} = 1, \forall i, j$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Calculer $C = AB - BA$ et en déduire la forme de $\tilde{C} + C$.

On a $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\tilde{C} + C$ est la matrice nulle de dimension 3.

3. On donne la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $A^2 - 2A + 3I = 0$.

4. Déterminer la forme générale des matrices qui commutent avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

La forme générale des matrices qui commutent avec A est du type $\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}$ ($a, b \in \mathbb{C}$).

II. Déterminants

1. Calculer le plus rapidement possible le déterminant de chacune des matrices suivantes.

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2-i & 3i \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2i \\ (i+1)^2 & 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 6 \\ 6 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -6 \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de A vaut $\frac{1}{9}(8-i)$, celui de B vaut 1 et celui de C vaut 90.

2. Le déterminant de chacune des matrices suivantes est un polynôme en $x \in \mathbb{C}$. Factoriser ce polynôme en un produit de facteurs du premier degré.

$$\begin{pmatrix} 1-x & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 2-x \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} i & x+2 \\ -x & -i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x & -4 \\ 1 & x \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de la première matrice est égal à $\left(x - \frac{3 + \sqrt{13}}{2}\right) \left(x - \frac{3 - \sqrt{13}}{2}\right)$; celui de la deuxième matrice est égal à $(x+1)^2$ et celui de la troisième matrice vaut $(x+2i)(x-2i)$.

III. Inversion de matrices

Calculer (si elle existe) la matrice inverse de chacune des matrices suivantes (on donne $\alpha \in \mathbb{R}$).

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha \\ \cos \alpha & -\sin \alpha \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ i & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- L'inverse de la première matrice est $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
- La deuxième matrice ne possède pas d'inverse car son déterminant est nul.
- La troisième matrice est égale à son inverse.

- L'inverse de la quatrième matrice est $\frac{1+i}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ i & i & 1 \\ i & 1 & 1 \end{pmatrix}$