1, 2, 3...Sciences

Année académique 2011-2012

Exercices de mathématiques
Liste type numéro 6
Répétition 6 : correction

Version 11 octobre 2011(V1 : 29/08/09)

I. Décomposition en fractions simples

Décomposer les fractions rationnelles suivantes en fractions rationnelles simples à coefficients réels.

$$(1)\ \frac{1}{x^2-4x+4},\qquad (2)\ \frac{x}{-x^2+2x+3},\qquad (3)\ \frac{2}{x(x^2-4x+4)}$$

$$(4)\ \frac{x^2+1}{3x+1},\qquad (5)\ \frac{x^2-2}{x^2+2},\qquad (6)\ \frac{x^3}{x^3+1}$$

On a les décompositions suivantes :

$$(1)\ \frac{1}{x^2-4x+4}=\frac{1}{(x-2)^2},\ x\in\mathbb{R}\backslash\{2\}\quad (2)\ \frac{x}{-x^2+2x+3}=-\frac{1}{4}\left(\frac{3}{x-3}+\frac{1}{x+1}\right),\ x\in\mathbb{R}\backslash\{-1,\,3\}$$

$$(3)\ \frac{2}{x(x^2-4x+4)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x-2}+\frac{2}{(x-2)^2}\right),\ x\in\mathbb{R}_0\setminus\{2\}$$

$$(4)\ \frac{x^2+1}{3x+1}=\frac{3x-1}{9}+\frac{10}{9(3x+1)},\ x\in\mathbb{R}\setminus\{-\frac{1}{3}\}\qquad (5)\ \frac{x^2-2}{x^2+2}=1-\frac{4}{x^2+2},\quad x\in\mathbb{R}$$

$$(6)\ \frac{x^3}{x^3+1}=1-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{x-2}{x^2-x+1}\right),\quad x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$$

II. Manipulation des fonctions élémentaires

1. **Simplifier les expressions suivantes au maximum**

$$\ln\left(\cos\frac{\pi}{3}\right)+\ln\left(\left(\sin\frac{4\pi}{3}\right)^2\right),\quad \operatorname{tg}\left(\ln(e^{3\pi}/2)\right),\quad \exp(3\ln(2e)),$$

$$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\ \arcsin\left(\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)\right),\ \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right),\ \operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right),\ \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(\frac{4\pi}{7}\right)\right).$$

A la première ligne, les expressions valent respectivement $\ln 3-3\ln 2,\ -\operatorname{tg}(\ln 2)$ et $8e^3$.

A la deuxième ligne, les expressions valent respectivement $-\frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{5},\ \frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{2}$ et $-\frac{3\pi}{7}$

III. Exercices sur les limites des valeurs des fonctions

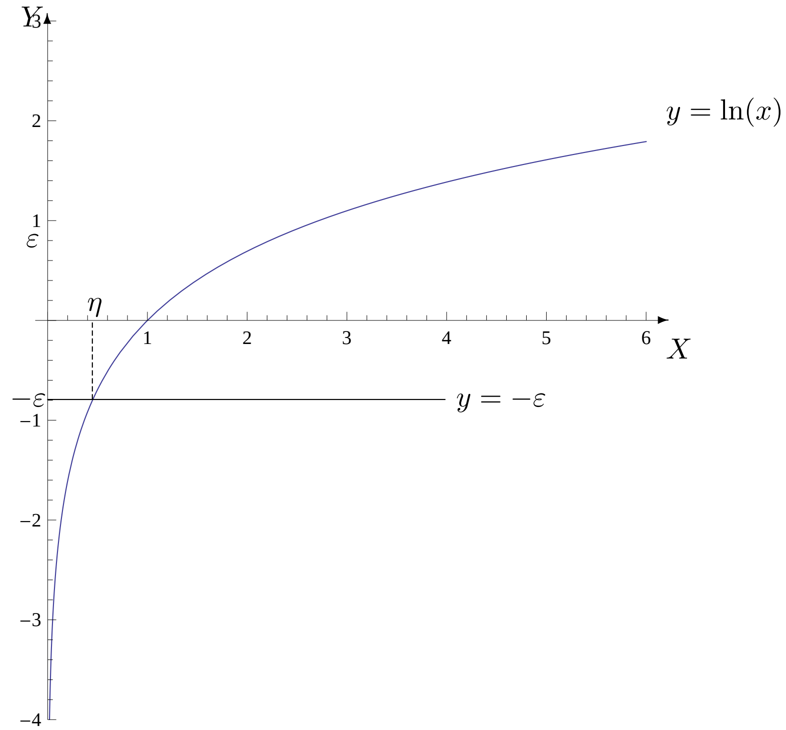
1. **On a**

$$\lim_{x\to 0^+}\ln x=-\infty.$$

Exprimer mathématiquement explicitement la définition qui « se cache » derrière cette succession de symboles (qui « résument » en fait la définition) et en donner une interprétation graphique.

En mathématique, la définition de $\lim_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$ est donnée par

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\eta>0\quad \text{tel que}\quad 0<x\le\eta\Rightarrow\ln x\le-\varepsilon.$$



2. **Se rappeler les limites relatives aux fonctions élémentaires et en déduire rapidement par exemple les quelques limites suivantes**

$$(a)\ \lim_{x\to 0} \exp\left(\frac{1}{x}\right), \quad (b)\ \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{\ln(x^2)}, \quad (c)\ \lim_{x\to 1^+} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x-1}\right).$$

La limite (a) n'existe pas, la limite (b) vaut 0^+ et la limite (c) vaut $\left(\frac{\pi}{2}\right)^-$.

3. **Calculer (si possible) les limites suivantes, *sans appliquer le théorème de l'Hospital***

$$(1)\ \lim_{x\to 2} \frac{1}{x^2-4} \qquad (2)\ \lim_{x\to +\infty}(-x^2-2x) \qquad (3)\ \lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{1+x^6}}{x^3})$$

$$(4)\ \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{cotg} x}{\sin(3x)} \quad (5)\ \lim_{x\to -\infty}\left(\sqrt{1+x+2x^2} - \sqrt{2x^2+3}\right)$$

Les limites sont respectivement égales à

(1) ∞ (2) $-\infty$ (3) $(-1)^-$ (4) $+\infty$ (5) $\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^-$.