1, 2, 3. . .Sciences

Année académique 2011-2012

Exercices de mathématiques
Liste type numéro 6 (tous sauf Bio) : correction

Version 16 mars 2012

I. Diagonalisation

1. **Déterminer les valeurs propres des matrices suivantes et en donner la multiplicité.**

$$\begin{pmatrix} i & -i \\ i & i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 10 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de la première matrice sont $-1+i$ et $1+i$; ces valeurs propres sont simples (de multiplicité 1).
Les valeurs propres de la deuxième matrice sont 2 (valeur propre double) et 3 (valeur propre simple).
Les valeurs propres de la troisième matrice sont -4, 1 et 3 ; ces valeurs propres sont simples.

2. **Rechercher les valeurs propres et les vecteurs propres des matrices suivantes. Ces matrices sont-elles diagonalisables ? Pourquoi ? Si elles le sont, en déterminer une forme diagonale, ainsi qu'une matrice inversible qui y conduit.**

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

• Première matrice : 2 valeurs propres simples : -2 et 5 ; la matrice est donc diagonalisable.
Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre -2 sont du type $c\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$, $c \in \mathbb{C}_0$ et ceux relatifs à la valeur propre 5 sont du type $c'\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c' \in \mathbb{C}_0$.
On a, par exemple, $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ avec $S = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$ si on note A la matrice donnée.

• Deuxième matrice : 2 valeurs propres, l'une simple 1 et l'autre double -1.
Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre double -1 sont du type $c\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c \in \mathbb{C}_0$.
Comme cette valeur propre n'engendre pas 2 vecteurs propres linéairement indépendants, la matrice n'est pas diagonalisable.
Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre simple 1 sont du type $c'\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $c' \in \mathbb{C}_0$.

• Troisième matrice : 2 valeurs propres, l'une simple 1 et l'autre double -1.
Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre double -1 sont du type $c_1\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ non simultanément nuls. Cette matrice est donc diagonalisable car elle possède 3 vecteurs propres linéairement indépendants.

Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre simple 1 sont du type $c\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $c \in \mathbb{C}_0$.

On a, par exemple, $S^{-1}AS = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\0 & -1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ avec $S = \begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\1 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\end{pmatrix}$ si on note A la matrice donnée.

• Quatrième matrice : 3 valeurs propres simples : -4, 1 et 3 ; la matrice est donc diagonalisable.

Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre -4 sont du type $c\begin{pmatrix}-3\\5\\1\end{pmatrix}$, $c \in \mathbb{C}_0$; ceux relatifs à la valeur propre 1 sont du type $c_1\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$, $c_1 \in \mathbb{C}_0$ et ceux relatifs à la valeur propre 3 sont du type $c_2\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}$, $c_2 \in \mathbb{C}_0$.

On a, par exemple, $S^{-1}AS = \begin{pmatrix}-4 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 3\end{pmatrix}$ avec $S = \begin{pmatrix}-3 & 1 & 3\\5 & 0 & 2\\1 & 3 & -1\end{pmatrix}$ si on note A la matrice donnée.

3. **Une matrice carrée A de dimension 2 possède les deux valeurs propres 1 et -1, auxquelles peuvent être associés respectivement les vecteurs propres $\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$. Que vaut A ?**

   La matrice A est égale à $\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$

II. Divers

1. **L'institut météorologique a fait les observations suivantes :**
   – on n'a jamais vu deux jours ensoleillés consécutifs,
   – s'il fait beau un jour donné, on a une chance égale d'avoir de la pluie ou de la neige le lendemain,
   – s'il pleut ou s'il neige, on a une chance sur deux que le temps se maintienne le jour suivant et une chance sur quatre qu'il fasse beau le lendemain.
   Sachant cela,
   (a) **Représenter la matrice de transition de ce système.**
   (b) **Sachant qu'il fait beau aujourd'hui, quel pourcentage de chance a-t-on qu'il fasse beau dans deux jours ?**
   (c) **A long terme, quelle sera l'évolution du climat ?**

   (a) Si on note N_0, P_0 et S_0 respectivement un jour de neige, un jour de pluie et un jour de soleil au départ et N_1, P_1 et S_1 la météo correspondante le jour suivant, on a

$$\begin{pmatrix} N_1 \\ P_1 \\ S_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_0 \\ P_0 \\ S_0 \end{pmatrix}$$

et la matrice de dimension 3 est la matrice de transition du système.
(b) Sachant qu'il fait beau aujourd'hui, on a 25 % de chance qu'il fasse beau dans 2 jours.

(c) Le vecteur de probabilité de valeur propre 1 est égal à $\begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,4 \\ 0,2 \end{pmatrix}$. A long terme, on 4 chances sur 10 qu'il neige ou qu'il pleuve et 2 chances sur 10 qu'il fasse ensoleillé.

2. **Le directeur d'une firme travaille selon les modalités suivantes : au départ, tous les nouveaux engagés sont considérés comme "débutants" et sont soumis à une évaluation tous les 6 mois. Les statistiques indiquent qu'après chaque évaluation semi-annuelle,**
   - **40 % "des débutants" sont nommés "intermédiaires", les autres restant "débutants",**
   - **30 % des "intermédiaires" sont promus "agents qualifiés" et ne sont plus évalués, les autres restent classés "intermédiaires".**

   (a) **Quelle est la probabilité qu'un agent "débutant" soit promu "agent qualifié" après deux évaluations ?**

   (b) **Quelle sera la répartition des employés à long terme si la politique du directeur ne change pas ?**

(a) La probabilité qu'un agent "débutant" soit promu "agent qualifié" après deux évaluations est de 3/25.
(b) Si la politique du directeur ne change pas, à long terme, tous les employés deviennent des "agents qualifiés".

3. **En algèbre linéaire (ou géométrie analytique), une rotation du plan (d'angle θ) est représentée par une matrice du type**

$$M_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

où θ est un réel (et représente la mesure de l'angle de la rotation).
   - **Pour tout θ, déterminer la matrice produit M_θ^2 et en simplifier les éléments au maximum.**
     On a
$$M_\theta^2 = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & -\sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & \cos(2\theta) \end{pmatrix}$$
   - **Montrer que quels que soient θ, θ', les matrices M_θ et $M_{\theta'}$ commutent. Qu'est-ce que cela signifie en termes de rotations ?**
     On a
$$M_\theta M_{\theta'} = M_{\theta'} M_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta+\theta') & -\sin(\theta+\theta') \\ \sin(\theta+\theta') & \cos(\theta+\theta') \end{pmatrix}$$
     ce qui signifie que l'ordre dans lequel on effectue les rotations n'a pas d'importance.

– **Montrer que quel que soit le réel θ, la matrice**

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

est aussi une matrice qui représente une rotation.

On a

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix}.$$

C'est donc aussi une matrice de rotation mais la rotation s'effectue dans le sens inverse de la rotation d'angle θ.

4. **Considérons la fonction $f : (x, y) \mapsto -x^2 - y^2 + xy + 2x - 4y + 3$.**

a) Résoudre le système $\begin{cases} D_x f(x, y) = 0 \\ D_y f(x, y) = 0 \end{cases}$

Le système a pour solution le couple $(0, -2)$.

b) Calculer les dérivées secondes de f.

Les dérivées secondes de f sont $D_x^2 f = -2$, $D_y^2 f = -2$ et $D_x D_y f = D_y D_x f = 1$.

c) Notons $H_f(x, y)$ la matrice $\begin{pmatrix} D_x^2 f & D_x D_y f \\ D_y D_x f & D_y^2 f \end{pmatrix}$.

Calculer det$H_f(x, y)$ si (x, y) est la (les) solution(s) du système ci-dessus.

Le déterminant de $H_f(0, -2)$ vaut 3.

d) Mêmes questions avec la fonction $g : (x, y) \mapsto x^2 - 2xy + \frac{1}{3}y^3 - 3y$.

Le système $\begin{cases} D_x g(x, y) = 0 \\ D_y g(x, y) = 0 \end{cases}$ a pour solution les couples $(-1, -1)$ et $(3, 3)$.
Les dérivées secondes de g sont $D_x^2 g = 2$, $D_y^2 g = 2y$ et $D_x D_y g = D_y D_x g = -2$.
Le déterminant de $H_g(-1, -1)$ vaut -8 et celui de $H_g(3, 3)$ vaut 8.

5. **Vrai ou faux (Justifier)**

(a) **Toute matrice carrée de dimension 3 commute avec** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Faux : si on multiplie la matrice donnée notée A à gauche et à droite par une matrice quelconque notée B du type $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ dont les élements sont des complexes quelconques, on a, par exemple, que la troisième ligne de AB est le vecteur nul alors que la troisième ligne de BA a pour premier élément g.

(b) **La matrice** $\begin{pmatrix} a - b & a^2 - ab + b^2 \\ a^2 - b^2 & a^3 - b^3 \end{pmatrix}$ $(a, b \in \mathbb{C})$ **est inversible.**

Faux car le déterminant de cette matrice vaut 0 si $a = b$ ou si $b = 0$.

(c) **Si une matrice carrée A de dimension 2 est de déterminant nul, alors l'une des colonnes de A est multiple de l'autre.**
Vrai (cf. théorie)

(d) **Si deux lignes d'une matrice carrée A de dimension 3 sont identiques, alors $\det A = 0$.**
Vrai (cf. théorie)

(e) **Si A est une matrice carrée de dimension 3, alors $\det(5A) = 5 \det A$.**
Faux : $\det(5A) = 5^3 \det A = 125 \det A$

(f) **Si B est une matrice obtenue en multipliant la ligne 3 de A par 5, alors $\det B = 5 \det A$.**
Vrai (cf. théorie)