1, 2, 3. . .Sciences

Année académique 2011-2012

Exercices de mathématiques
Liste type numéro 7
Répétition 7 : correction

Version 19 octobre 2011(V1 : 29/08/09)

I. Exercices sur les limites des valeurs des fonctions

Calculer (si possible) les limites suivantes, *sans appliquer le théorème de l'Hospital*

(1) $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^2-1}{|1-x|}$ (2) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{-2x^2+5x}{x^2+3}$ (3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{\sin(2x)}$

(4) $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln(|-x+\pi|)$ (5) $\lim\limits_{x\to +\infty} (\ln(3x+2)-\ln(3x))$

Toutes ces limites peuvent être envisagées et on a

(1) $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^2-1}{|1-x|} = (-2)^+$ (2) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{-2x^2+5x}{x^2+3} = (-2)^-$ (3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{\sin(2x)} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^+$

(4) $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln(|-x+\pi|) = +\infty$ (5) $\lim\limits_{x\to +\infty} (\ln(3x+2)-\ln(3x)) = 0^+$

II. Continuité et dérivation

1. **En appliquant la définition, montrer que $f : x \mapsto 3x^2+x$ est dérivable en 1 et donner la valeur de sa dérivée en ce point.**

   Calculons $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}(3h+7) = 7$. Comme cette limite existe et est finie, la fonction est dérivable en 1. La limite valant 7, la dérivée de cette fonction en 1 vaut 7.

2. **a) On donne des fonctions par les expressions explicites suivantes. En déterminer le domaine de définition, de continuité, de dérivabilité et en calculer la dérivée première.**

   $\sqrt[5]{3x^2+1}$ $\dfrac{1}{\sqrt{2+x}}$ $\dfrac{1}{3x^2+6x+3}$ $\operatorname{arctg}(\cos(x))$ $(*)$ $\sqrt{\sin 2x}$ $\sin(\operatorname{cotg}(x))$

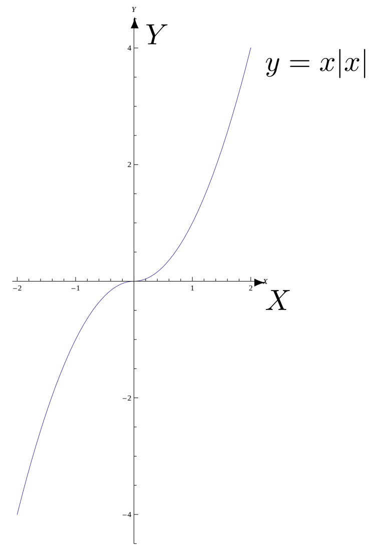
   $e^{\arccos(x)}$ e^{e^x} $\ln(x^4)$ $\ln(x^2+x-2)$ $(\ln(4))^x$ $x|x|$

   Si on note A le domaine de définition des fonctions, B leur domaine de continuité et C leur domaine de dérivabilité, on a les résultats suivants

f	$A=B$	C	Dérivée
$\sqrt[5]{3x^2+1}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\dfrac{6x}{5\sqrt[5]{(3x^2+1)^4}}$
$\dfrac{1}{\sqrt{2+x}}$	$]-2,+\infty[$	$]-2,+\infty[$	$\dfrac{-1}{2\sqrt{(2+x)^3}}$
$\dfrac{1}{3x^2+6x+3}$	$\mathbb{R}\setminus\{-1\}$	$\mathbb{R}\setminus\{-1\}$	$\dfrac{-2}{3(x+1)^3}$
$\operatorname{arctg}(\cos x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\dfrac{-\sin(x)}{1+\cos^2(x)}$
$\sqrt{\sin 2x}$	$\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \left[k\pi, \dfrac{\pi}{2}+k\pi\right]$	$\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \left]k\pi, \dfrac{\pi}{2}+k\pi\right[$	$\dfrac{\cos(2x)}{\sqrt{\sin(2x)}}$
$\sin(\operatorname{cotg}(x))$	$\mathbb{R}\setminus\{k\pi : k\in\mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R}\setminus\{k\pi : k\in\mathbb{Z}\}$	$\dfrac{-\cos(\operatorname{cotg}(x))}{\sin^2(x)}$

f	$A = B$	C	Dérivée
$e^{\arccos(x)}$	$[-1,1]$	$]-1,1[$	$\dfrac{-e^{\arccos(x)}}{\sqrt{1-x^2}}$
e^{e^x}	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$e^x\ e^{e^x}$
$\ln(x^4)$	$\mathbb{R}_0$	$\mathbb{R}_0$	$\dfrac{4}{x}$
$\ln(x^2+x-2)$	$]-\infty,-2[\ \cup\ ]1,+\infty[$	$]-\infty,-2[\ \cup\ ]1,+\infty[$	$\dfrac{2x+1}{x^2+x-2}$
$(\ln(4))^x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\ln(\ln(4))\ (\ln(4))^x$
$x\lvert x\rvert$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$2\lvert x\rvert$

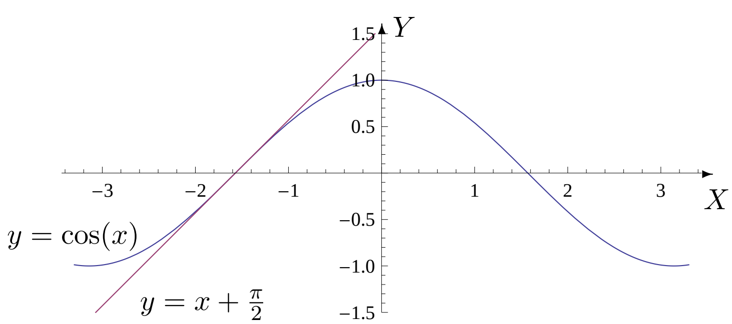
b) Représenter la fonction $x \mapsto x|x|$ dans un repère orthonormé.



III. Divers

1. **Déterminer l'équation cartésienne de la tangente au graphique de la fonction $x \mapsto \cos x$ au point d'abscisse $-\frac{\pi}{2}$. Représenter cette fonction et cette tangente.**

   L'équation cartésienne de la tangente au graphique de la fonction $x \mapsto \cos x$ au point d'abscisse $-\frac{\pi}{2}$ est $y = x + \frac{\pi}{2}$; le graphique de cette fonction et de cette tangente se trouve ci-dessous.



2. **Représenter graphiquement les fonctions f_1 et f_2 suivantes**

$$f_1(x) = \frac{-x - x^2 + 1}{2 - x}, \quad f_2(x) = xe^{-3x}.$$

Une étude graphique permet de représenter graphiquement les fonctions f_1 et f_2. Voici leur graphique.