1, 2, 3...Sciences

Année académique 2011-2012

Exercices de mathématiques
Liste type numéro 7 (tous sauf Bio) : correction

Version 16 mars 2012

Approximations polynomiales

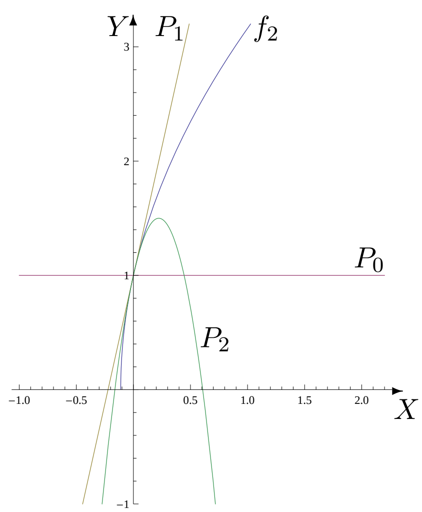
1. **Dans chacun des cas suivants, déterminer l'approximation polynomiale à l'ordre n en x_0 pour la fonction f_k. Représenter f_2 (—-ou f_3 ou f_5—) et ses approximations.**

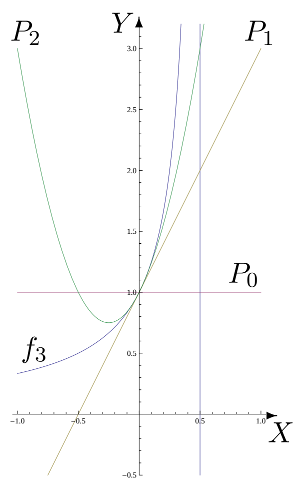
$$f_1(x) = \cos x \; e^{3x},\; x_0 = 0, n = 0, 1, 2, 3 \qquad f_2(x) = \sqrt{1+9x},\; x_0 = 0, n = 0, 1, 2$$
$$f_3(x) = \frac{1}{1-2x},\; x_0 = 0, n = 0, 1, 2 \qquad f_4(x) = \operatorname{arctg} x,\; x_0 = 0, n = 0, 1, 2$$
$$f_5(x) = \cos^2 x,\; x_0 = 0,\; n = 0, 1, 2 \qquad f_6(x) = \sin x,\; x_0 = 1, n = 0, 1, 2$$

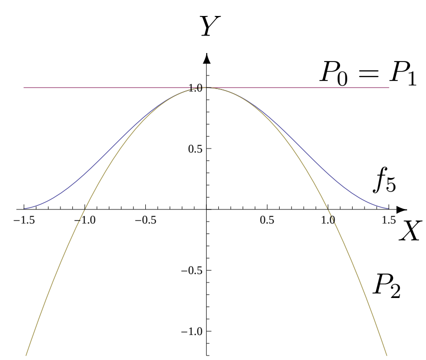
Fonction	Ordre 0	Ordre 1	Ordre 2
f_1	1	$1+3x$	$1+3x+4x^2,\; x \in \mathbb{R}$
f_2	1	$1+\frac{9x}{2}$	$1+\frac{9x}{2}-\frac{81x^2}{8},\; x \in \mathbb{R}$
f_3	1	$1+2x$	$1+2x+4x^2,\; x \in \mathbb{R}$
f_4	0	x	$x,\; x \in \mathbb{R}$
f_5	1	1	$1-x^2,\; x \in \mathbb{R}$
f_6	$\sin(1)$	$\sin(1)+\cos(1)(x-1)$	$\sin(1)+\cos(1)(x-1)-\sin(1)\frac{(x-1)^2}{2},\; x \in \mathbb{R}$

L'approximation à l'ordre 3 en 0 de f_1 est donnée par $P(x) = 1+3x+4x^2+3x^3,\; x \in \mathbb{R}$.

Dans les graphiques suivants, notons P_i l'approximation polynomiale à l'ordre i.

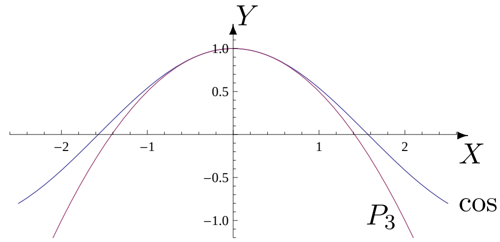






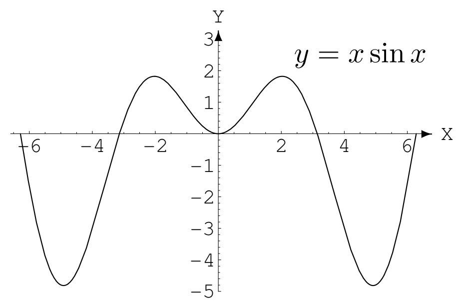
2. **a) Déterminer l'approximation polynomiale à l'ordre 3 en 0 de la fonction** cos **et en estimer le reste. Représenter la fonction et cette approximation dans le même repère orthonormé.**

L'approximation polynomiale à l'ordre 3 en 0 est donnée par $P(x) = 1 - \frac{x^2}{2},\ x \in \mathbb{R}$ et le reste vaut $R_3(x) = \dfrac{\cos(u)}{4!}x^4,\ x \in \mathbb{R}$ avec u strictement compris entre 0 et x. Dès lors, on a $\quad |R_3(x)| \leq \dfrac{x^4}{24}$.

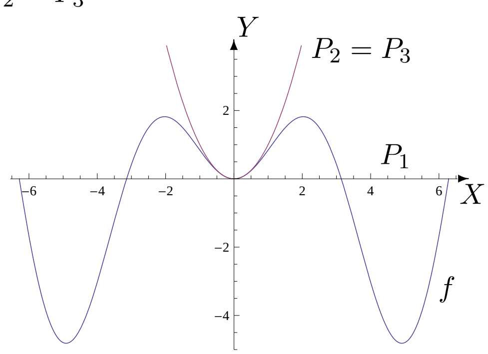


(*) **b) Déterminer l'approximation polynomiale en 0 à l'ordre 1, 2 et 3 de la fonction $f(x) = x\sin x,\ x \in \mathbb{R}$. Représenter graphiquement ces approximations dans le même repère orthonormé que celui où f est représenté (cf ci-dessous), en justifiant les positions relatives des courbes.**

(Suggestion : $|\sin x| \leq |x|\ \forall x \in \mathbb{R}$)



Les approximations polynomiales en 0 à l'ordre 1, 2 et 3 de la fonction f sont respectivement $P_1(x) = 0,\ P_2(x) = x^2 = P_3(x),\ x \in \mathbb{R}$.
Au voisinage de zéro, le graphique de f est
1) au-dessus de celui de P_1
2) en dessous de celui de $P_2 = P_3$



3. (*) **Déterminer l'approximation polynomiale à l'ordre $0, 1, 2, 3$ en 0 des fonctions données par** [1]

$$g_1(x) = \ln\left(\frac{1-x}{x+1}\right), \quad g_2(x) = \frac{-x+2}{2x^2+x-1}.$$

Pour g_1, les approximations polynomiales à l'ordre $0, 1, 2, 3$ en 0 sont respectivement

$$P_0(x) = 0,\ P_1(x) = -2x,\ P_2(x) = -2x,\ P_3(x) = -2x - \frac{2x^3}{3},\ x \in \mathbb{R}.$$

1. *Suggestion.* Utiliser le développement de $\ln(1+x)$ et $\ln(1-x)$; décomposer en fractions simples

Pour g_2, les approximations polynomiales à l'ordre $0, 1, 2, 3$ en 0 sont respectivement

$P_0(x) = -2,\ P_1(x) = -2 - x,\ P_2(x) = -2 - x - 5x^2,\ P_3(x) = -2 - x - 5x^2 - 7x^3,\ x \in \mathbb{R}.$

4. **Un tunnel d'une longueur l relie deux points de la surface de la Terre. Si R désigne le rayon de la Terre, déterminer une approximation de la profondeur maximale de ce tunnel.**

   L'approximation de la profondeur maximale de ce tunnel vaut $\dfrac{l^2}{8R}$.

5. **Perdu dans le désert, en panne de gps et de toute batterie (calculette etc), un explorateur est amené à établir son itinéraire en se servant de cartes, des ≪ vieux ≫ moyens et de ses connaissances de base de ≪ calculus ≫. Il est amené à estimer la valeur du cosinus d'un angle de mesure égale à 20 degrés. Il souhaite avoir cette estimation avec une erreur strictement inférieure à un millième. Comment peut-il procéder ?**

   Une mesure d'angle égale à 20 degrés correspond au réel $\dfrac{\pi}{9} < \dfrac{1}{2}$.
   L'approximation polynomiale en 0 du cosinus donne

$$P(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{avec} \quad |R_{2n}(x)| \leq \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Si $x = \dfrac{1}{2}$,

$$\frac{(\frac{1}{2})^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{1}{2^{2n+1}(2n+1)!} < \frac{1}{10^3} \quad \text{est vérifié si} \quad n = 2.$$

Dès lors, une valeur approchée du cosinus d'un angle de mesure égale à 20 degrés est donnée par

$$P\left(\frac{\pi}{9}\right) = 1 - \frac{(\frac{\pi}{9})^2}{2!} + \frac{(\frac{\pi}{9})^4}{4!} = 1 - \frac{\pi^2}{162} + \frac{\pi^4}{81^2\ .\ 24} \approx 0,9396951.$$