Université de Liège

1, 2, 3...Sciences

Année académique 2011-2012

Exercices de mathématiques
Répétition 7 Biologie : correction

Version 16 mars 2012

Approximations polynomiales

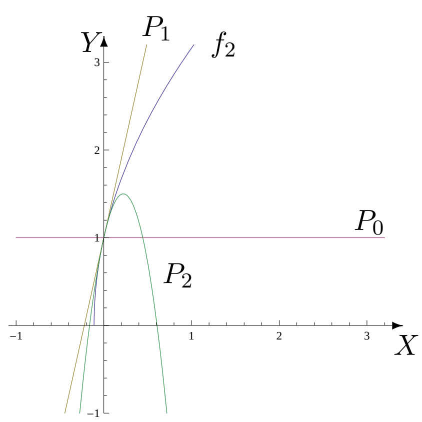
1. **Dans chacun des cas suivants, déterminer l'approximation polynomiale à l'ordre n en x_0 pour la fonction f_k. Représenter f_2 (—-ou f_3 ou f_5—) et ses approximations.**

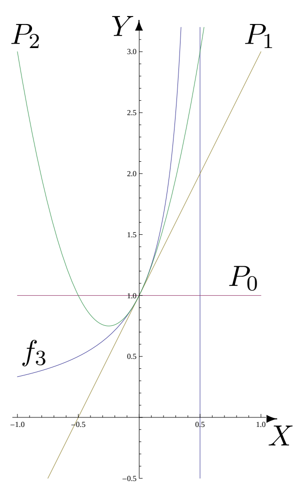
$$f_1(x) = \cos x\ e^{3x},\ x_0 = 0, n = 0,1,2,3 \qquad f_2(x) = \sqrt{1+9x},\ x_0 = 0, n = 0,1,2$$
$$f_3(x) = \frac{1}{1-2x},\ x_0 = 0, n = 0,1,2 \qquad f_4(x) = \operatorname{arctg} x,\ x_0 = 0, n = 0,1,2$$
$$f_5(x) = \cos^2 x,\ x_0 = 0,\ n = 0,1,2 \qquad f_6(x) = \sin x,\ x_0 = 1, n = 0,1,2$$

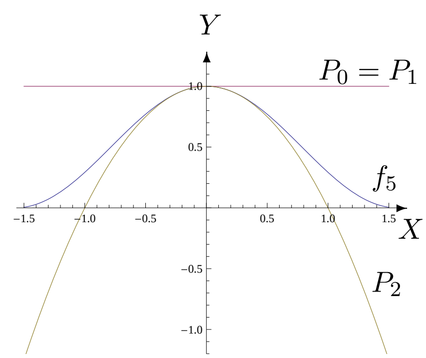
Fonction	Ordre 0	Ordre 1	Ordre 2
f_1	1	$1+3x$	$1+3x+4x^2,\ x \in \mathbb{R}$
f_2	1	$1+\frac{9x}{2}$	$1+\frac{9x}{2}-\frac{81x^2}{8},\ x \in \mathbb{R}$
f_3	1	$1+2x$	$1+2x+4x^2,\ x \in \mathbb{R}$
f_4	0	x	$x,\ x \in \mathbb{R}$
f_5	1	1	$1-x^2,\ x \in \mathbb{R}$
f_6	$\sin(1)$	$\sin(1)+\cos(1)(x-1)$	$\sin(1)+\cos(1)(x-1)-\sin(1)\frac{(x-1)^2}{2},\ x \in \mathbb{R}$

L'approximation à l'ordre 3 en 0 de f_1 est donnée par $P(x) = 1+3x+4x^2+3x^3,\ x \in \mathbb{R}$.

Dans les graphiques suivants, notons P_i l'approximation polynomiale à l'ordre i.

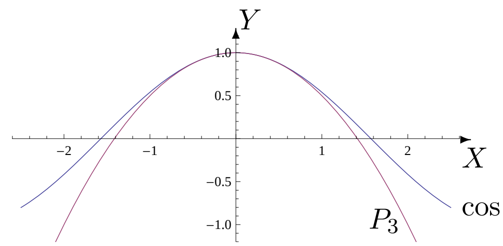






2. **Déterminer l'approximation polynomiale à l'ordre 3 en 0 de la fonction** cos **et en estimer le reste. Représenter la fonction et cette approximation dans le même repère orthonormé.**

L'approximation polynomiale à l'ordre 3 en 0 est donnée par $P(x) = 1 - \frac{x^2}{2},\ x \in \mathbb{R}$ et le reste vaut $R_3(x) = \dfrac{\cos(u)}{4!}x^4,\ x \in \mathbb{R}$ avec u strictement compris entre 0 et x. Dès lors, on a $\quad |R_3(x)| \leq \dfrac{x^4}{24}.$



3. **Perdu dans le désert, en panne de gps et de toute batterie (calculette etc), un explorateur est amené à établir son itinéraire en se servant de cartes, des ≪ vieux ≫ moyens et de ses connaissances de base de ≪ calculus ≫. Il est amené à estimer la valeur du cosinus d'un angle de mesure égale à 20 degrés. Il souhaite avoir cette estimation avec une erreur strictement inférieure à un millième. Comment peut-il procéder ?**

   Une mesure d'angle égale à 20 degrés correspond au réel $\dfrac{\pi}{9} < \dfrac{1}{2}$.
   L'approximation polynomiale en 0 du cosinus donne

$$P(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{avec} \quad |R_{2n}(x)| \leq \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

   Si $x = \dfrac{1}{2}$,

$$\frac{(\frac{1}{2})^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{1}{2^{2n+1}(2n+1)!} < \frac{1}{10^3} \quad \text{est vérifié si} \quad n = 2.$$

   Dès lors, une valeur approchée du cosinus d'un angle de mesure égale à 20 degrés est donnée par

$$P\left(\frac{\pi}{9}\right) = 1 - \frac{(\frac{\pi}{9})^2}{2!} + \frac{(\frac{\pi}{9})^4}{4!} = 1 - \frac{\pi^2}{162} + \frac{\pi^4}{81^2\ .\ 24} \approx 0,9396951.$$