1, 2, 3. . .Sciences

Année académique 2011-2012

Exercices de mathématiques
Liste type numéro 8
Répétition 8 : correction

Version 3 novembre 2011

Limites et dérivées (suite)

1. **Calculer les limites suivantes (dans chaque cas, si ce n'est pas possible ou si elle n'existe pas, en donner la raison)**

(1) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\cos(2x)}{x+1}$ (2) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{3x^2+1}{\operatorname{arctg}(x^2+2)}$ (3) $\lim\limits_{x\to +\infty} \exp\left(-\dfrac{1}{x+2}\right)$

(4) $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x^3}\ln\sqrt[5]{x}$ (5) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\ln(1/|x|)}{\sqrt{x^2}}$ (6) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{2x^3}$

(7) $\lim\limits_{x\to +\infty} x\ln\left(2+\dfrac{1}{x}\right)$ (8) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\ln(|2-x|)-\ln x^2\right)$ (9) $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{\ln(x-2)}{|2-x|}$

(10) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(x^2-3x-4)}{x-4}$ (11) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln|x^2-3x-4|}{x-4}$ (12) $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{1+\cos x}{\sin x}$

(13) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}$ (14) $\lim\limits_{u\to -\infty} u\, e^{\frac{1}{u-1}}$ (15) $\lim\limits_{t\to 1^+} (1-t)\ln(t^2-1)$

(16) $\lim\limits_{y\to +\infty} \log_y 3$ (17) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\exp(3x)}{\exp(x)}$ (18) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\exp(x)}{\sqrt{\exp(x^2)}}$

Fonction	dom(f)	Limite
$f(x)=\dfrac{\cos(2x)}{x+1}$	$\mathbb{R}\setminus\{-1\}$	$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\cos(2x)}{x+1}=1^-$
$f(x)=\dfrac{3x^2+1}{\operatorname{arctg}(x^2+2)}$	$\mathbb{R}$	$\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{3x^2+1}{\operatorname{arctg}(x^2+2)}=+\infty$
$f(x)=\exp\left(-\dfrac{1}{x+2}\right)$	$\mathbb{R}\setminus\{-2\}$	$\lim\limits_{x\to +\infty} \exp\left(-\dfrac{1}{x+2}\right)=1^-$
$f(x)=\sqrt{x^3}\ln\sqrt[5]{x}$	$]0,+\infty[$	$\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x^3}\ln\sqrt[5]{x}=0$
$f(x)=\dfrac{\ln(1/\|x\|)}{\sqrt{x^2}}$	$\mathbb{R}_0$	$\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\ln(1/\|x\|)}{\sqrt{x^2}}=0$
$f(x)=\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{2x^3}$	$]-\infty,-1[\,\cup\,]0,+\infty[$	$\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{2x^3}=0^+$
$f(x)=x\ln\left(2+\dfrac{1}{x}\right)$	$]-\infty,-1/2[\,\cup\,]0,+\infty[$	$\lim\limits_{x\to +\infty} x\ln\left(2+\dfrac{1}{x}\right)=+\infty$
$f(x)=\left(\ln(\|2-x\|)-\ln x^2\right)$	$\mathbb{R}_0\setminus\{2\}$	$\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\ln(\|2-x\|)-\ln x^2\right)=-\infty$
$f(x)=\dfrac{\ln(x-2)}{\|2-x\|}$	$]2,+\infty[$	$\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{\ln(x-2)}{\|2-x\|}$ pas de sens
$f(x)=\dfrac{\ln(x^2-3x-4)}{x-4}$	$]-\infty,-1[\,\cup\,]4,+\infty[$	$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(x^2-3x-4)}{x-4}=0$
$f(x)=\dfrac{\ln\|x^2-3x-4\|}{x-4}$	$\mathbb{R}\setminus\{-1,\ 4\}$	$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln\|x^2-3x-4\|}{x-4}=0$
$f(x)=\dfrac{1+\cos x}{\sin x}$	$\mathbb{R}\setminus\{k\pi : k\in\mathbb{Z}\}$	$\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{1+\cos x}{\sin x}=0$
$f(x)=\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}$	$\mathbb{R}_0\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi : k\in\mathbb{Z}\}$	$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}=\dfrac{1}{2}$

Fonction	$\mathrm{dom}(f)$	Limite
$f(u) = u\ e^{\frac{1}{u-1}}$	$\mathbb{R} \setminus \{1\}$	$\lim\limits_{u\to-\infty} u\ e^{\frac{1}{u-1}} = -\infty$
$f(t) = (1-t)\ln(t^2-1)$	$]-\infty,-1[\ \cup\ ]1,+\infty[$	$\lim\limits_{t\to1^+} (1-t)\ln(t^2-1) = 0$
$f(y) = \log_y 3$	$]0,1[\ \cup\ ]1,+\infty[$	$\lim\limits_{y\to+\infty} \log_y 3 = 0^+$
$f(x) = \dfrac{\exp(3x)}{\exp(x)}$	$\mathbb{R}$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\exp(3x)}{\exp(x)} = +\infty$
$f(x) = \dfrac{\exp(x)}{\sqrt{\exp(x^2)}}$	$\mathbb{R}$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\exp(x)}{\sqrt{\exp(x^2)}} = 0^+$

La limite $\lim\limits_{x\to2^-} \dfrac{\ln(x-2)}{|2-x|}$ n'a pas de sens car on peut trouver un intervalle ouvert comprenant 2 dont l'intersection avec $\mathrm{dom}(f)\cap\ ]-\infty,2[$ est vide.

2. **Une lentille convexe est caractérisée par une distance focale f. Si un objet se trouve à une distance p de la lentille, son image sera à une distance q liée à p par la relation $\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Si la distance focale vaut 3 cm et que p croît, quelle est la vitesse de variation de q lorsque p vaut 33cm ?**

   Si la distance focale vaut 3 cm et que p croît, la vitesse de variation de q lorsque p vaut 33cm est égale à $\dfrac{-1}{100}$. La distance q de l'image décroît donc à la vitesse de $\dfrac{1}{100}$ cm pour une variation de 1 cm de p.