1, 2, 3... Sciences

Année académique 2011-2012

Exercices de mathématiques
Répétition 8 Biologie : correction

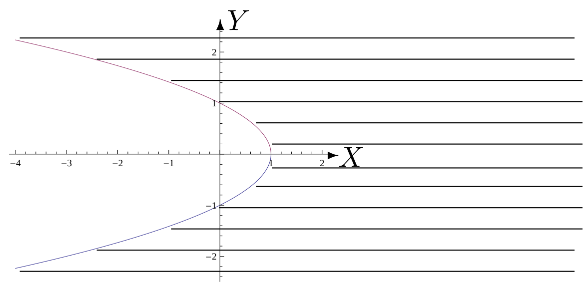
Version 22 mars 2012

1. **On donne la fonction f par**

$$f(x,y)=\sqrt{x+y^2-1}$$

   (a) **Déterminer le domaine d'infinie dérivabilité de cette fonction et le représenter dans un repère orthonormé.**

   La fonction f est infiniment dérivable sur $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x+y^2-1>0\}$. Les points de l'ensemble sont représentés par la partie hachurée du plan, les points de la parabole étant exclus.



   (b) **Déterminer l'expression explicite de $F(t)=f(3t^2,2t+1)$, le domaine de dérivabilité de cette fonction et l'expression explicite de sa dérivée en tout point du domaine.**

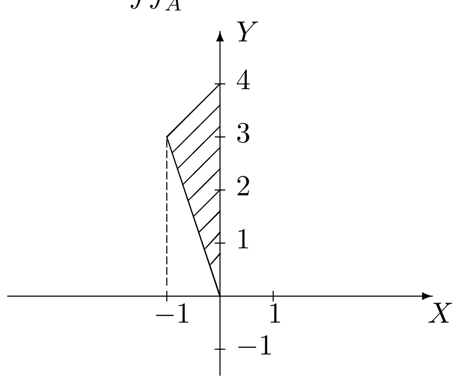
   La fonction F est la fonction $t\mapsto F(t)=\sqrt{7t^2+4t}$; son domaine de dérivabilité est l'ensemble $\{t\in\mathbb{R} : 7t^2+4t>0\}=\left]-\infty,-\frac{4}{7}\right[\cup\,]0,+\infty[$ et sa dérivée est donnée par $DF(t)=\dfrac{7t+2}{\sqrt{7t^2+4t}}$.

   (c) **Que vaut la dérivée de F en 1 ? Simplifier votre réponse au maximum.**

   La dérivée de F en 1 vaut $\dfrac{9\sqrt{11}}{11}$.

2. **On donne l'ensemble fermé hachuré A suivant. Déterminer**

$$\iint_A xe^{x-y}\,dxdy.$$



La fonction $f:(x,y)\mapsto xe^{x-y}$ est continue sur le fermé borné A ; elle est donc intégrable sur cet ensemble et on a

$$\iint_A xe^{x-y}\,dxdy=\frac{13}{16e^4}-\frac{1}{16}.$$

3. **On donne la matrice**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) **Déterminer les valeurs propres de A.**

Les valeurs propres de A sont $2-i$ et $2+i$.

(b) **Cette matrice est-elle diagonalisable ? Si oui, en donner une forme diagonale ainsi qu'une matrice inversible qui y conduit puis vérifier que ces matrices sont correctes.**

Les valeurs propres étant simples, la matrice est diagonalisable et on a, par exemple,

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 2+i & 0 \\ 0 & 2-i \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad S = \begin{pmatrix} 1-i & 1+i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) **Montrer que la matrice A vérifie $A^2-4A+5I=0$ où I est la matrice identité.**

4. **Soient les matrices**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 4 \\ i \end{pmatrix}$$

Si c'est possible, calculer

(a) **le déterminant de AB**
Le produit AB est impossible à calculer car le nombre de colonnes de A n'est pas égal au nombre de lignes de B.

(b) **le déterminant de BA**
Le produit BA est une matrice de format 1×2 ; comme cette matrice n'est pas carrée, on ne peut calculer son déterminant.

(c) **le déterminant de BC**
Le déterminant de BC vaut $-8+3i$.

(d) **la matrice inverse de AC**
La matrice AC est une matrice de format 2×1 ; comme cette matrice n'est pas carrée, on ne peut calculer son inverse.

(e) **la matrice inverse de A**

La matrice inverse de A est la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

5. **On donne la fonction f par**

$$f(x) = \operatorname{tg}(2x).$$

(a) **Si possible, déterminer les approximations polynomiales de cette fonction à l'ordre 1, 2 et 3 en 0.**
Si on note $P_n(x)$ l'approximation polynomiale à l'ordre n en 0, on a

$$P_1(x) = 2x = P_2(x), \quad P_3(x) = 2x + \frac{8}{3}x^3, \; x \in \mathbb{R};$$

(b) **Dans un même repère orthonormé, représenter le graphique de f et les approximations demandées au voisinage de 0 en utilisant différentes couleurs.**