1, 2, 3. . . Sciences

Année académique 2011-2012

Exercices de mathématiques
Liste de la répétition 9 (Géologie) : correction

Version 28 mars 2012

I. Suites

1. **Etudier la convergence des suites suivantes et préciser leur limite en cas de convergence** :

a) $x_m = \dfrac{2m^2+5m+1}{3m^2+2}$ $(m \in \mathbb{N})$

b) $x_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$

c) $x_n = n - \sqrt{n^3-n^2}$ $(n \in \mathbb{N})$

d) $x_n = \dfrac{2n+(-1)^n}{5n+(-1)^{n+1}}$ $(n \in \mathbb{N})$

e) $x_n = \ln(2n^2-n) - \ln(3n+1)$ $(n \in \mathbb{N}_0)$

f) $x_k = \sqrt[k]{k^2}$ $(k \in \mathbb{N}_0)$

g) $x_n = \dfrac{n\sin(n!)}{n^2+1}$ $(n \in \mathbb{N})$

h) $x_j = \dfrac{j!}{j^j}$ $(j \in \mathbb{N}_0)$

i) $x_j = \dfrac{(j!)^2}{(2j)!}$ $(j \in \mathbb{N})$

j) [1] $x_n = \dfrac{1}{n^3}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2$ $(n \in \mathbb{N}_0)$

a) La suite converge vers $\frac{2}{3}$
b) La suite converge vers 1
c) La suite converge vers $-\infty$
d) La suite converge vers $\frac{2}{5}$
e) La suite converge vers $+\infty$
f) La suite converge vers 1
g) La suite converge vers 0
h) La suite converge vers 0
i) La suite converge vers 0
j) La suite converge vers $\frac{1}{3}$

2. **Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ définie par**

$$u_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$$

est divergente.

II. Séries

1. **Etudier la convergence des séries suivantes** :

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n^2)}{n^2}$ b) $\displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^j$ c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n\ln(n)}$ d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n\sin\left(\frac{1}{n}\right)$

a) Comparaison avec une série de Riemann convergente car $\alpha = 2 > 1$ donc série convergente.
b) Série géométrique convergente car $-\frac{1}{2} \in]-1,1[$
c) Série alternée dont le terme général décroît vers 0 donc convergente.
d) Série divergente car son terme général ne tend pas vers 0.

1. Suggestion : Montrer par récurrence sur n que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

2. **Etudier la convergence des séries suivantes et préciser la somme de celles qui convergent** :

$$\text{a) } \sum_{j=0}^{+\infty} (\sqrt{2})^j \qquad \text{b) } \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{(j+1)(j+2)} \qquad \text{c) } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^{n+2}}{5^n} \qquad \text{d) } \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^{3k-1}}{k!}$$

a) Série géométrique divergente car $\sqrt{2} \notin]-1, 1[$
b) Série convergente dont la somme vaut $\frac{1}{2}$
c) Série géométrique convergente car $\frac{3}{5} \in]-1, 1[$; la somme de la série vaut $\frac{45}{2}$
d) Série définissant l'exponentielle de e^3 ; la somme de la série vaut $\frac{1}{e} \exp(e^3)$