1, 2, 3...Sciences

Année académique 2011-2012

Exercices de mathématique
Exercices récapitulatifs : correction

Version 5 décembre 2011

Exercices divers

1. **Résoudre les équations et inéquations suivantes (pour (c) et (d), on suppose que $x \in [\pi, 3\pi]$)**
   (a) $2x(x+1) = |x+1|$
   (b) $\dfrac{|1-x|}{x^2-1} \geq x-1$
   (c) $\sin(3x) - \cos(x) = 0$
   (d) $\cos(2x) \leq \cos(x)$

   Solution. Les ensembles S de solutions sont les suivants :
   (a) $S = \{-1,\ 1/2\}$
   (b) $S =]-\infty, -1[\ \cup \{0\} \cup\ ]1, \sqrt{2}]$
   (c) $S = \left\{\dfrac{9\pi}{8},\ \dfrac{5\pi}{4},\ \dfrac{13\pi}{8},\ \dfrac{17\pi}{8},\ \dfrac{9\pi}{4},\ \dfrac{21\pi}{8}\right\}$
   (d) $S = \left[\dfrac{4\pi}{3},\ \dfrac{8\pi}{3}\right]$

2. **Simplifier au maximum les expressions suivantes :**
   (a) $\sin(\ln(e^{-\pi/3})) + \cos(\text{tg }(-\pi/4))$
   (b) $\arcsin(1 - \cos(5\pi/3)) + \arccos(\cos(7\pi/6))$

   Solution. La première expression vaut $-\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \cos(1)$ et la deuxième vaut π.

3. **Dans un repère orthonormé, on donne les points A, B, C dont les coordonnées sont $A(1,0,2)$, $B(-1,2,1)$ et $C(3,1,1)$. Calculer**
   (a) $2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$
   (b) $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{BC}$

   Solution. Le produit scalaire vaut -20 et le produit vectoriel est le vecteur de composantes $(-1,\ -4,\ -6)$.

4. **Si elles existent, déterminer les limites suivantes**
   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{\ln(x-1)}{x-2}$
   (b) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{|1-x|}{\sqrt{1+x^2}}$
   (c) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \text{arctg}\left(\frac{x^3+1}{2x}\right)$
   (d) $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{\exp(2x)-1}{x}$
   (e) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} (\ln(2x+5) - \ln(2x))$

   Solution. Les limites peuvent toutes être envisagées et valent respectivement 1, 1^-, $\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^-$, 2 et 0^+.

5. **Où la fonction $x \mapsto \arcsin(\sqrt{1-x^2})$ est-elle définie ? dérivable ? En déterminer la dérivée première.**

   Solution. La fonction est définie sur $[-1,1]$ et dérivable sur $]-1,0[\ \cup\ ]0,1[$; sa dérivée première est la fonction

$$x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \text{si } x \in]-1,0[\\ \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}} & \text{si } x \in]0,1[\end{cases}$$

6. **Si elles existent, déterminer la valeur des intégrales suivantes et simplifier la réponse au maximum.**
   (a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln(3x)}{x} dx$
   (b) $\int_{-\infty}^0 x\, e^{2x}\, dx$
   (c) $\displaystyle\int_{-1}^{+\infty} \frac{1}{1+x} dx$
   (d) $\int_{-2}^2 \sqrt{x^2} dx$
   (e) $\displaystyle\int_3^4 \frac{2}{x(x^2-4x+4)} dx$

   Solution. Toutes les fonctions sont intégrables sur l'intervalle considéré sauf la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ qui n'est ni intégrable en $+\infty$, ni intégrable en -1. Les intégrales valent respectivement

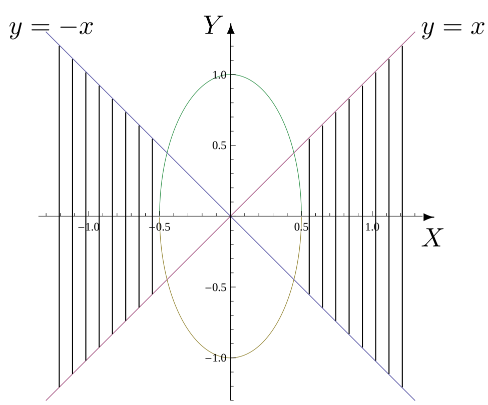
   (a) $\dfrac{1}{2} \ln 18. \ln 2$ (b) $-\dfrac{1}{4}$ (d) 4 (e) $\dfrac{1}{2}(\ln 2 - \ln 3 + 1)$

7. **Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{C}$.**
   (a) $x^2 + 2 = ix$
   (b) $8 + x^3 = 0$

   Solution. Les ensembles S de solutions sont les suivants :
   (a) $S = \{-i,\ 2i\}$ (b) $S = \{-2,\ 1 - i\sqrt{3},\ 1 + i\sqrt{3}\}$

8. **Représenter dans un repère orthonormé l'ensemble dont une description analytique est la suivante**
$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \geq y^2 \geq 1 - 4x^2\}.$$

   Solution.



   Les points des bords sont compris dans l'ensemble.

9. **Les courbes de croissance de population du modèle de Gompertz sont les représentations de fonctions exponentielles du type**
$$f(t) = e^{be^{ct}},\ t \in \mathbb{R}$$
   où b, c sont des paramètres réels strictement négatifs.
   (a) **Déterminer la dérivée seconde de f.**
   (b) **Quelle(s) valeur(s) doit-on donner à b pour que la dérivée seconde de f s'annule en $t = 0$?**
   (c) **Pour $b = c = -2$, déterminer la limite des valeurs de f aux extrémités de son domaine de définition.**

Solution. (a) La fonction est infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée seconde vaut

$$D^2 f(t) = bc^2 e^{ct}(1 + b\, e^{ct}) e^{be^{ct}}$$

(b) La dérivée seconde de f s'annule en $t = 0$ si $b = -1$.
(c) La limite en $-\infty$ vaut 0^+ et celle en $+\infty$ vaut 1^-.

Problèmes élémentaires

1. **La distance de freinage (en mètres) d'une voiture roulant à v km/h sur sol sec est donnée par**
   (a) $\left(\frac{v}{10}\right)^2 + \frac{v}{2}$ **si cette voiture est équipée de freins normaux**
   (b) v **si cette voiture est équipée de freins ABS spéciaux.**

   Déterminer les vitesses pour lesquelles la voiture équipée de freins ABS est plus performante quant à la distance de freinage.

   Solution. La voiture équipée de freins ABS est plus performante pour des vitesses strictement supérieures à 50 km/h.

2. **Lors d'une interrogation, un étudiant doit répondre à 100 questions d'un QCM. Pour toute réponse correcte, il obtient 1 point et pour toute réponse incorrecte, on lui retire 0,25 point. Sachant qu'il obtient 53,75 points comme cote finale et qu'il est obligé de répondre à toutes les questions, quel est le nombre de réponses correctes fournies ?**

   Solution. L'étudiant a fourni 63 réponses correctes.

QCM

1. Le carré d'un nombre complexe est toujours
   (a) un nombre positif
   (b) un nombre négatif
   (c) un nombre imaginaire pur
   ♣ aucune réponse correcte
2. La partie réelle du produit de deux nombres complexes est toujours égale
   (a) au produit des parties réelles de ces nombres
   (b) à la somme des parties réelles de ces nombres
   (c) à la somme de la partie réelle de l'un et de la partie imaginaire de l'autre
   (d) au produit de la partie réelle de l'un et de la partie imaginaire de l'autre
   ♣ aucune réponse correcte
3. La valeur absolue de la somme de deux réels est toujours
   (a) inférieure ou égale à la différence entre les valeurs absolues de ces réels
   ♣ inférieure ou égale à la somme des valeurs absolues de ces réels
   (c) supérieure ou égale à la somme des valeurs absolues de ces réels
   (d) supérieure ou égale à la moitié du produit de ces réels
   (e) aucune réponse correcte
4. Si f est définie sur $\mathbb{R}$, le graphique de $F(x) = f(-x),\ x \in \mathbb{R}$ est
   (a) le symétrique du graphique de f par rapport à la première bissectrice
   (b) le symétrique du graphique de f par rapport à l'axe X
   ♣ le symétrique du graphique de f par rapport à l'axe Y
   (d) le symétrique du graphique de f par rapport à l'origine
   (e) aucune réponse correcte

5. L'ensemble des solutions de l'inéquation $|x|^3 < |x|^2$ est l'ensemble
   (a) $[-1, 1[$
   (b) $\{x \in \mathbb{R} : |x| < 1\}$
   ♣ $]-1, 1[\setminus\{0\}$
   (d) $]-\infty, -1[$
   (e) aucune réponse correcte
6. Dans le plan muni d'un repère, une droite a toujours une équation cartésienne du type $y = mx + p$, $(m, p \in \mathbb{R})$
   (a) vrai
   ♣ faux
7. Le cube d'un réel non nul et de son opposé sont toujours égaux
   (a) vrai
   ♣ faux
8. Etant donné deux vecteurs non nuls, tout autre vecteur du plan peut se décomposer de manière unique comme combinaison linéaire de ceux-ci.
   (a) vrai
   ♣ faux
9. Le produit de deux fonctions croissantes est une fonction croissante
   (a) vrai
   ♣ faux
10. Le domaine de la fonction donnée par $\cos(\cos x)$ est l'intervalle [-1,1]
    (a) vrai
    ♣ faux