1, 2, 3... *Sciences*

Année académique 2011-2012

Exercices de mathématiques
Révisions en vue de l'interrogation du 20 avril : correction

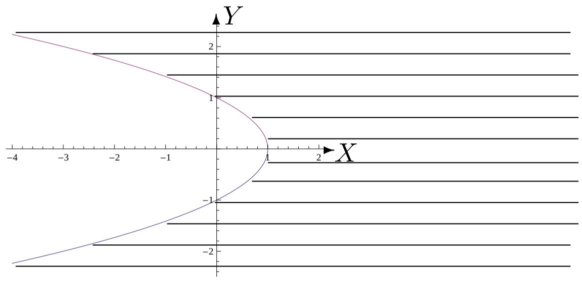
Version 22 mars 2012

Révisions

1. **On donne la fonction f par**
$$f(x,y) = \sqrt{x + y^2 - 1}$$

   (a) **Déterminer le domaine d'infinie dérivabilité de cette fonction et le représenter dans un repère orthonormé.**

   La fonction f est infiniment dérivable sur $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y^2 - 1 > 0\}$. Les points de l'ensemble sont représentés par la partie hachurée du plan, les points de la parabole étant exclus.



   (b) **Déterminer l'expression explicite de $F(t) = f(3t^2, 2t+1)$, le domaine de dérivabilité de cette fonction et l'expression explicite de sa dérivée en tout point du domaine.**

   La fonction F est la fonction $t \mapsto F(t) = \sqrt{7t^2 + 4t}$; son domaine de dérivabilité est l'ensemble $\{t \in \mathbb{R} : 7t^2 + 4t > 0\} = \left]-\infty, -\frac{4}{7}\right[\cup]0, +\infty[$ et sa dérivée est donnée par $DF(t) = \dfrac{7t+2}{\sqrt{7t^2+4t}}$.

   (c) **Que vaut la dérivée de F en 1 ? Simplifier votre réponse au maximum.**

   La dérivée de F en 1 vaut $\dfrac{9\sqrt{11}}{11}$.

2. **On donne la fonction f continûment dérivable sur $]0,2[\times]-3,0[$ et à valeurs strictement positives.**

   (a) **Déterminer le domaine de dérivabilité de $g : x \mapsto \sqrt{f(\arcsin x, 2x-1)}$.**

   La fonction g est dérivable sur $\left]0, \frac{1}{2}\right[$.

   (b) **Calculer la dérivée de g en fonction de f et de ses dérivées partielles.**

   La dérivée de g est donnée par

$$\begin{aligned} Dg(x) = &\frac{1}{2\sqrt{f(\arcsin(x), 2x-1)}}.(D_u f)(\arcsin(x), 2x-1).\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ &+ \frac{1}{2\sqrt{f(\arcsin(x), 2x-1)}}.(D_v f)(\arcsin(x), 2x-1).2 \end{aligned}$$

   si u et v sont respectivement la première et la deuxième variable de f.

   (c) **Que vaut cette dérivée en $1/2$?**

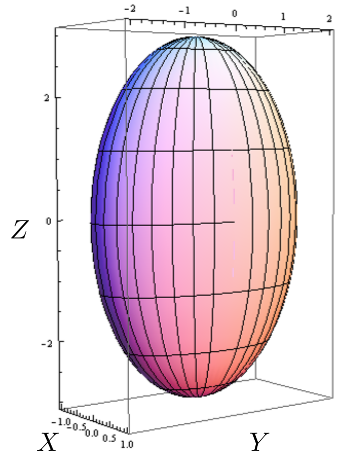
   La fonction g n'est pas dérivable en $1/2$.

3. **Esquisser la représentation graphique de la surface quadrique d'équation**

$$36x^2 + 9y^2 + 4z^2 - 36 = 0.$$

Quel est le nom de cette quadrique ?

Cette quadrique est un ellipsoïde dont voici la représentation



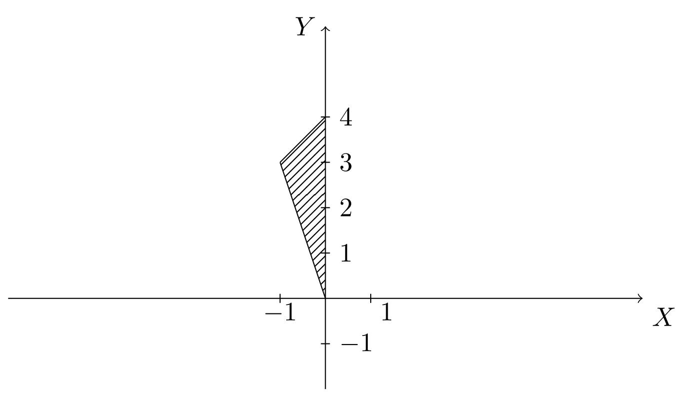
4. **Déterminer le gradient de la fonction f donnée par $f(s,t,u) = 2s\arcsin(3t-u)$.**

La fonction f est dérivable sur $\{(s,t,u) \in \mathbb{R}^3 : -1 < 3t - u < 1\}$ et son gradient est le vecteur de composantes

$$\left(2\arcsin(3t-u), \frac{6s}{\sqrt{1-(3t-u)^2}}, \frac{-2s}{\sqrt{1-(3t-u)^2}}\right).$$

5. **On donne l'ensemble fermé hachuré A suivant. Déterminer**

$$\iint_A xe^{x-y}\,dxdy.$$



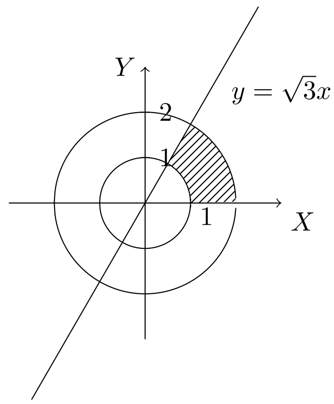
La fonction $f : (x,y) \mapsto xe^{x-y}$ est continue sur le fermé borné A ; elle est donc intégrable sur cet ensemble et on a

$$\iint_A xe^{x-y}\,dxdy = \frac{13}{16e^4} - \frac{1}{16}.$$

6. **Calculer, si possible l'intégrale suivante**

$$\iint_A \frac{y}{x}\,dxdy,$$

où A est l'ensemble fermé hachuré ci-dessous.



La fonction $f : (x, y) \mapsto \frac{y}{x}$ est continue sur le fermé borné A ; elle est donc intégrable sur cet ensemble et, en passant aux coordonnées polaires, on obtient

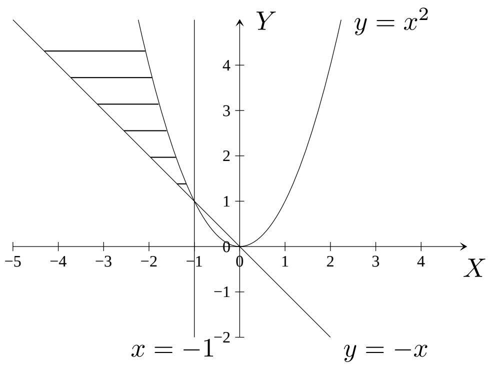
$$\iint_A \frac{y}{x}\ dxdy = \int_1^2 \left(\int_0^{\frac{\pi}{3}} r\,\mathrm{tg}(\theta)\ d\theta \right) dr = \frac{3}{2}\ln 2.$$

7. **Calculer, si possible, les intégrales suivantes et représenter leurs ensembles d'intégration.**

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \left(\int_{-x}^{x^2} xe^{-2y} dy \right) dx$ b) $\displaystyle\int_{-2}^{2} \left(\int_{y^2}^{4} \frac{y}{1+x^6} dx \right) dy$

a) La fonction $f : (x, y) \mapsto xe^{-2y}$ est continue et négative sur l'ensemble d'intégration A (ensemble hachuré ci-dessous) non borné et parallèle aux 2 axes. On vérifie qu'elle est intégrable sur A et on a

$$\int_{-\infty}^{-1} \left(\int_{-x}^{x^2} xe^{-2y} dy \right) dx = -\frac{1}{4e^2}.$$



b) La fonction $f : (x,y) \mapsto \dfrac{y}{1+x^6}$ est continue sur l'ensemble d'intégration B (ensemble hachuré ci-dessous) borné fermé et parallèle aux 2 axes ; elle est donc intégrable sur cet ensemble. Après permutation de l'ordre d'intégration, on a

$$\int_{-2}^{2} \left(\int_{y^2}^{4} \frac{y}{1+x^6} dx \right) dy = \int_0^4 \left(\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} \frac{y}{1+x^6}\ dy \right) dx = 0.$$