Université de Liège

1, 2, 3. . . Sciences

Année académique 2011-2012

Exercices de mathématiques
Liste de révision en vue de l'examen : correction
(Chimie, Géographie et Physique)

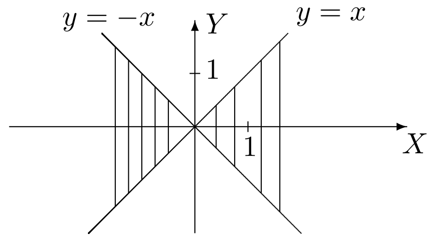
Version 10 mai 2012

Fonctions de plusieurs variables

1. **On donne la fonction** $f : (x,y) \mapsto \ln\left(\sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}}\right)$.

   a) Déterminer son domaine de définition, de dérivabilité et les représenter dans un repère orthonormé.

   Solution. Les 2 domaines sont égaux à $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq y,\ \dfrac{x+y}{x-y} > 0\right\}$



   Les points des droites sont exclus de l'ensemble.

   b) Déterminer les dérivées partielles de cette fonction et, si possible, les évaluer au point de coordonnées $(-2,1)$**.**

   Solution. Les dérivées partielles de la fonction sont données par

$$D_x f(x,y) = \frac{-y}{x^2-y^2} \qquad\qquad D_y f(x,y) = \frac{x}{x^2-y^2}$$

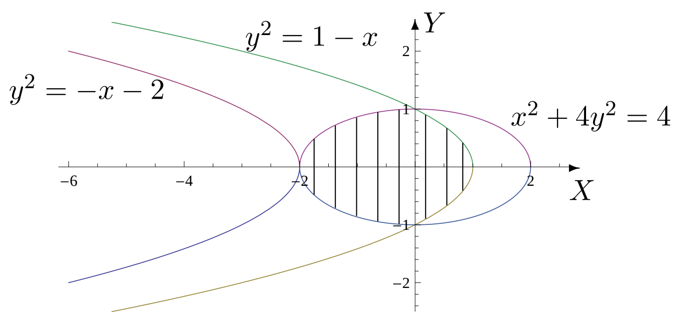
   et, comme le point de coordonnées $(-2,1)$ appartient au domaine de dérivabilité, on a $D_x f(-2,1) = \frac{-1}{3}$ et $D_y f(-2,1) = \frac{-2}{3}$.

2. **Soit** f **une fonction continûment dérivable sur** $]-2,1[\times]-4,4[$**. On demande le domaine de dérivabilité de la fonction** F **définie par** $F(x,y) = f(x+y^2, x^2+4y^2)$**, sa représentation graphique ainsi que l'expression de ses dérivées partielles en fonction de celles de** f**.**

   Solution. Le domaine de dérivabilité de F est l'ensemble

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -2 < x+y^2 < \ 1,\ -4 < x^2+4y^2 < 4\}.$$

   Il est représenté par l'ensemble des points hachurés ci-dessous, les points des courbes étant exclus de l'ensemble.



Les dérivées partielles de F sont données par

$$(D_xF)(x,y) = (D_uf)(x+y^2, x^2+4y^2)\ .\ 1 + (D_vf)(x+y^2, x^2+4y^2)\ .\ 2x$$

$$(D_yF)(x,y) = (D_uf)(x+y^2, x^2+4y^2)\ .\ 2y + (D_vf)(x+y^2, x^2+4y^2)\ .\ 8y$$

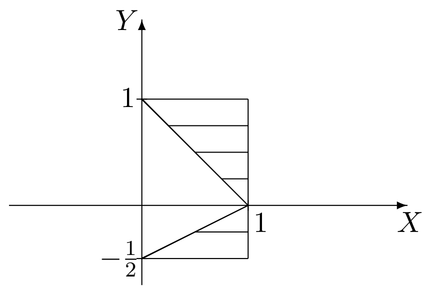
si u et v sont respectivement la première et la seconde variable de f.

3. **Si elles existent, calculer les intégrales suivantes**

a) $I = \displaystyle\int_0^4 \left(\int_{\sqrt{x}}^2 x \sin(y^5)\, dy \right) dx$

Solution. On a $I = \dfrac{1}{10}(1 - \cos(32))$

b) $I = \displaystyle\iint_A e^{-y^2}\, dx\, dy$ **si** A **est l'ensemble fermé borné hachuré ci-dessous**



Solution. On a $I = \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2e} - \dfrac{1}{\sqrt[4]{e}}$.

c) $I = \displaystyle\iint_A \frac{1}{\sqrt{(1+x^2+y^2)^5}}\, dx\, dy$ **si** $A = [0, +\infty[\times [0, +\infty[$

Solution. On a $I = \dfrac{\pi}{6}$

d) $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\int_0^2 \frac{e^{-(y+1)x}}{4+y^2}\, dy \right) dx$

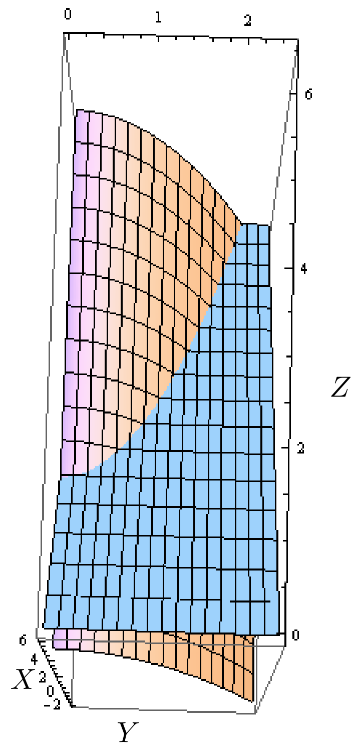
Solution. On a $I = \dfrac{1}{5}\left(\ln 3 - \dfrac{1}{2} \ln 2 + \dfrac{\pi}{8} \right)$.

4. **Calculer le volume du corps de l'espace borné par les surfaces d'équation cartésienne** $x + z = 6$ **et** $x + y^2 = 4$ **et les plans d'équation** $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$**. Donner aussi une représentation graphique de ce corps.**

Solution. Le volume du corps vaut

$$V = \int_0^2 \left(\int_0^{4-y^2} (6-x)\ dx \right) dy = \frac{352}{15}$$

et voici sa représentation graphique (partie "sous" le plan)



Calcul matriciel

1. **Calculer (si elle existe) la matrice inverse de la matrice suivante puis montrer que la matrice trouvée est bien l'inverse de la matrice donnée si**

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Solution. Comme $\det A = 3 \neq 0$, la matrice inverse de A existe et on a

$$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -4 & -5 & 3 \\ -4 & -8 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

De plus, $AA^{-1} = I$ si I est la matrice identité de dimension 3.

2. **Rechercher les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice suivante. Cette matrice est-elle diagonalisable ? Pourquoi ? Si elle l'est, en déterminer une forme diagonale, ainsi qu'une matrice inversible qui y conduit puis prouver que les matrices données sont correctes.**

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -2 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Solution. Les valeurs propres de A sont -1 (simple) et 5 (double).
Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre double 5 sont les vecteurs

$$c\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c'\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

où c et c' sont des complexes non simultanément nuls. Dès lors, la matrice A est diagonalisable puisqu'elle possède 3 vecteurs propres linéairement indépendants.
Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre simple -1 sont les vecteurs

$$c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ où } c \in \mathbb{C}_0.$$

Ainsi, on a, par exemple,

$$S = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{tel que} \quad \Delta = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Les matrices données sont correctes puisque

$$AS = S\Delta = \begin{pmatrix} -5 & -5 & -1 \\ 5 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Approximations polynomiales

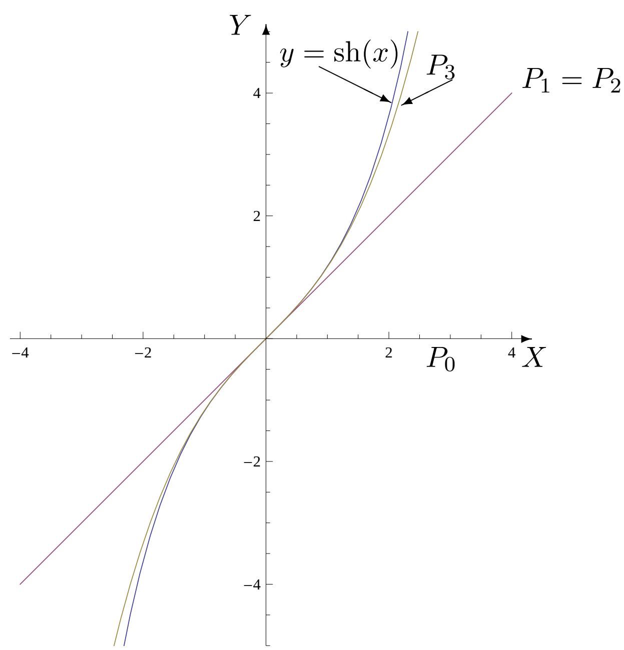
Déterminer l'approximation polynomiale à l'ordre $n = 0, 1, 2$ et 3 en $x_0 = 0$ pour la fonction

$$f : x \mapsto \mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Représenter f et ses approximations.

Solution. Si on note $P_n(x)$ l'approximation à l'ordre n en 0, puisque f est infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$, on a

$$P_0(x) = 0, \quad P_1(x) = P_2(x) = x \quad \text{et } P_3(x) = x + \frac{x^3}{6}, \; x \in \mathbb{R}.$$



$\boxed{\textbf{Séries}}$

1. **Etudier la convergence des séries suivantes :**

$$(1)\ \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2\sin(k\theta)}{k(k+1)}\ \ (\theta \geq 0) \qquad\qquad (2)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^n}{n}.$$

Solution.
(1) Comparaison avec une série de Riemann convergente car $\alpha = 2 > 1$ donc série convergente.
(2) Série divergente car son terme général ne tend pas vers zéro.

2. **Etudier la convergence des séries suivantes et préciser la somme de celles qui convergent :**

$$(1)\ \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{k}} \qquad (2)\ \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{-2}{(2k+5)(2k+3)} \qquad (3)\ \sum_{n=3}^{+\infty} \left[\left(\frac{1}{4}\right)^n + \left(\frac{3}{4}\right)^n\right] \qquad (4)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln^n(x)}{n!}\ (x > 0).$$

Solution.
(1) Comparaison avec une série de Riemann divergente car $\alpha = \frac{1}{2} < 1$ donc série divergente.
(2) Série convergente ; la somme de la série vaut $-\frac{1}{5}$
(3) Série convergente ; la somme de la série vaut $\frac{41}{24}$
(4) Série exponentielle ; la somme de la série vaut $x - 1$.