Université de Liège

1, 2, 3... Sciences

Année académique 2011-2012

Mathématiques générales A : corrigé du test 10

Version 25 novembre 2011

Test 10 du 18-11-2011

1. – **Qu'appelle-t-on un découpage de $[a, b]$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$) ?**
   Solution. Un découpage de $[a, b]$ est la donnée d'un naturel strictement positif n et de $n-1$ points $x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1}$ de $]a, b[$.
   – **On donne le découpage suivant de l'intervalle $[-2, 3]$: $-2, \frac{-3}{2}, \frac{-1}{4}, 0, 1, 3$. Quelle est la largeur de ce découpage ?**
   Solution. La largeur du découpage donné est le nombre

$$\begin{aligned} L &= \sup\left\{\frac{-3}{2} - (-2), \frac{-1}{4} - \frac{-3}{2}, 0 - \frac{-1}{4}, 1 - 0, 3 - 1\right\} \\ &= \sup\left\{\frac{1}{2}, \frac{5}{4}, \frac{1}{4}, 1, 2\right\} \\ &= 2. \end{aligned}$$

   – **Si on ajoute 10 points supplémentaires, la largeur de ce découpage est-elle nécessairement plus petite ? Justifier.**
   Solution. La largeur du découpage ne sera pas plus petite si tous ces points appartiennent à $]-2, 1[$.

2. **Primitiver la fonction donnée explicitement ci-dessous.**

$$\frac{1}{\sqrt{1-9x^2}}$$

   Solution. La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-9x^2}}$ est continue sur

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{R} : 1 - 9x^2 > 0\} \\ &= \left]\frac{-1}{3}, \frac{1}{3}\right[, \end{aligned}$$

   elle est donc primitivable sur $\left]\frac{-1}{3}, \frac{1}{3}\right[$.
   Par une primitivation par substitution, on a

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{1-9x^2}}dx &= \frac{1}{3}\int \frac{3}{\sqrt{1-(3x)^2}}dx \\ &= \frac{1}{3}\int \frac{D(3x)}{\sqrt{1-(3x)^2}}dx \\ &\simeq \frac{1}{3}\left[\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt\right]_{t=3x} \\ &\simeq \frac{1}{3}\left[\arcsin(t)\right]_{t=3x} \\ &\simeq \frac{1}{3}\arcsin(3x),\ x \in \left]\frac{-1}{3}, \frac{1}{3}\right[. \end{aligned}$$

3. **Que vaut la primitive de $\sin(2x)$ qui prend la valeur 2 en 0 ?**
   Solution. La fonction $f : x \mapsto \sin(2x)$ est continue sur $\mathbb{R}$, elle est donc primitivable sur $\mathbb{R}$.
   Par une primitivation par substitution, on a

$$\begin{aligned} \int \sin(2x)dx &= \frac{1}{2}\int 2\sin(2x)dx \\ &= \frac{1}{2}\int D(2x)\sin(2x)dx \\ &\simeq \frac{1}{2}\left[\int \sin(t)dt\right]_{t=2x} \\ &\simeq \frac{1}{2}\left[-\cos(t)\right]_{t=2x} \\ &\simeq \frac{-\cos(2x)}{2},\ x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Dès lors, la primitive de f qui vaut 2 en 0 est la fonction $F : x \mapsto \frac{-\cos(2x)}{2} + C$ avec $C \in \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{array}{rcl} F(0) & = & 2 \\ \Leftrightarrow \dfrac{-\cos(2.0)}{2} + C & = & 2 \\ \Leftrightarrow \dfrac{-1}{2} + C & = & 2 \\ \Leftrightarrow C & = & \dfrac{5}{2}. \end{array}$$

La primitive recherchée est donc la fonction $F : x \mapsto \frac{-\cos(2x)}{2} + \frac{5}{2},\ x \in \mathbb{R}$.

Test 10 du 21-11-2011

1. – **Qu'appelle-t-on un découpage de $[a, b]$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$) ?**
   Solution. Un découpage de $[a, b]$ est la donnée d'un naturel strictement positif n et de $n-1$ points $x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1}$ de $]a, b[$.
   – **On donne le découpage suivant de l'intervalle $[0, 4]$: $0, \frac{2}{3}, 1, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, 4$. Quelle est la largeur de ce découpage ?**
   Solution. La largeur du découpage donné est le nombre

$$\begin{array}{rcl} L & = & \sup\left\{\dfrac{2}{3} - 0, 1 - \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{2} - 1, \dfrac{7}{4} - \dfrac{3}{2}, 4 - \dfrac{7}{4}\right\} \\ & = & \sup\left\{\dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{9}{4}\right\} \\ & = & \dfrac{9}{4}. \end{array}$$

   – **Si on ajoute 10 points supplémentaires, la largeur de ce découpage est-elle nécessairement plus petite ? Justifier.**
   Solution. La largeur du découpage ne sera pas plus petite si tous ces points appartiennent à $\left]0, \frac{7}{4}\right[$.
2. **Primitiver la fonction donnée explicitement ci-dessous.**

$$\frac{1}{1 + 4x^2}$$

   Solution. La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1+4x^2}$ est continue sur

$$\begin{array}{rcl} A & = & \{x \in \mathbb{R} : 1 + 4x^2 \neq 0\} \\ & = & \mathbb{R}, \end{array}$$

   elle est donc primitivable sur $\mathbb{R}$.
   Par une primitivation par substitution, on a

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int \frac{1}{1+4x^2} dx & = & \dfrac{1}{2} \displaystyle\int \frac{2}{1 + (2x)^2} dx \\ & = & \dfrac{1}{2} \displaystyle\int \frac{D(2x)}{1 + (2x)^2} dx \\ & \simeq & \dfrac{1}{2} \left[\displaystyle\int \frac{1}{1+t^2} dt\right]_{t=2x} \\ & \simeq & \dfrac{1}{2} [\mathrm{arctg}(t)]_{t=2x} \\ & \simeq & \dfrac{1}{2} \mathrm{arctg}(2x),\ x \in \mathbb{R}. \end{array}$$

3. **Que vaut la primitive de $\cos(3x)$ qui prend la valeur 4 en $-\pi$?**
   Solution. La fonction $f : x \mapsto \cos(3x)$ est continue sur $\mathbb{R}$, elle est donc primitivable sur $\mathbb{R}$.

Par une primitivation par substitution, on a

$$\begin{aligned}
\int \cos(3x)dx &= \frac{1}{3}\int 3\cos(3x)dx \\
&= \frac{1}{3}\int D(3x)\cos(3x)dx \\
&\simeq \frac{1}{3}\left[\int \cos(t)dt\right]_{t=3x} \\
&\simeq \frac{1}{3}\left[\sin(t)\right]_{t=3x} \\
&\simeq \frac{\sin(3x)}{3},\ x\in\mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Dès lors, la primitive de f qui vaut 4 en $-\pi$ est la fonction $F : x \mapsto \frac{\sin(3x)}{3} + C$ avec $C \in \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{aligned}
F(-\pi) &= 4 \\
\Leftrightarrow \frac{\sin(-3\pi)}{3} + C &= 4 \\
\Leftrightarrow 0 + C &= 4 \\
\Leftrightarrow C &= 4.
\end{aligned}$$

La primitive recherchée est donc la fonction $F : x \mapsto \frac{\sin(3x)}{3} + 4,\ x \in \mathbb{R}$.

Test 10 du 25-11-2011

1. – **Qu'appelle-t-on un découpage de $[a,b]$ (avec $a,b\in\mathbb{R},\ a<b$) ?**
   Solution. Un découpage de $[a,b]$ est la donnée d'un naturel strictement positif n et de $n-1$ points $x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1}$ de $]a,b[$.
   – **On donne le découpage suivant de l'intervalle $[-3,2]$: $-3, \frac{-5}{2}, \frac{-4}{3}, 1, \frac{4}{3}, 2$. Quelle est la largeur de ce découpage ?**
   Solution. La largeur du découpage donné est le nombre

$$\begin{aligned}
L &= \sup\left\{\frac{-5}{2}-(-3), \frac{-4}{3}-\frac{-5}{2}, 1-\frac{-4}{3}, \frac{4}{3}-1, 2-\frac{4}{3}\right\} \\
&= \sup\left\{\frac{1}{2}, \frac{7}{6}, \frac{7}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right\} \\
&= \frac{7}{3}.
\end{aligned}$$

   – **Si on ajoute 10 points supplémentaires, la largeur de ce découpage est-elle nécessairement plus petite ? Justifier.**
   Solution. La largeur du découpage ne sera pas plus petite si aucun de ces points n'appartient à $]\frac{-4}{3}, 1[$.
2. **Primitiver la fonction donnée explicitement ci-dessous.**

$$\frac{\cos(\ln(x))}{x}$$

Solution. La fonction $f : x \mapsto \frac{\cos(\ln(x))}{x}$ est continue sur

$$\begin{aligned}
A &= \{x\in\mathbb{R} : x > 0 \text{ et } x \neq 0\} \\
&=]0,+\infty[,
\end{aligned}$$

elle est donc primitivable sur $]0,+\infty[$.

Par une primitivation par substitution, on a

$$\begin{aligned}
\int \frac{\cos(\ln(x))}{x} &= \int D(\ln(x))\cos(\ln(x))dx \\
&\simeq \left[\int \cos(t)dt\right]_{t=\ln(x)} \\
&\simeq [\sin(t)]_{t=\ln(x)} \\
&\simeq \sin(\ln(x)),\ x \in]0,+\infty[.
\end{aligned}$$

3. **Que vaut la primitive de $\sqrt{2x+1}$ qui prend la valeur 1 en $-1/2$?**
Solution. La fonction $f : x \mapsto \sqrt{2x+1}$ est continue sur $A = \{x \in \mathbb{R} : 2x+1 \geq 0\} = \left[\frac{-1}{2}, +\infty\right[$, elle est donc primitivable sur $\left]\frac{-1}{2}, +\infty\right[$.
Par une primitivation par substitution, on a

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{2x+1}dx &= \frac{1}{2}\int 2\sqrt{2x+1}dx \\
&= \frac{1}{2}\int D(2x+1)\sqrt{2x+1}dx \\
&\simeq \frac{1}{2}\left[\int \sqrt{t}dt\right]_{t=2x+1} \\
&\simeq \frac{1}{2}\left[\frac{t^{3/2}}{3/2}\right]_{t=2x+1} \\
&\simeq \frac{(2x+1)\sqrt{2x+1}}{3},\ x \in \left]\frac{-1}{2}, +\infty\right[.
\end{aligned}$$

Toute primitive de cette fonction admet une limite finie en $(-1/2)^+$ et peut donc être prolongée continûment sur $[-1/2, +\infty[$. Dès lors, la primitive de f qui vaut 1 en $-1/2$ est la fonction $F : x \mapsto \frac{(2x+1)\sqrt{2x+1}}{3} + C$ avec $C \in \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{aligned}
F(-1/2) &= 1 \\
\Leftrightarrow \frac{(2.(-1/2)+1)\sqrt{2.(-1/2)+1}}{3} + C &= 1 \\
\Leftrightarrow 0 + C &= 1 \\
\Leftrightarrow C &= 1.
\end{aligned}$$

La primitive recherchée est donc la fonction $F : x \mapsto \frac{(2x+1)\sqrt{2x+1}}{3} + 1,\ x \in \left[\frac{-1}{2}, +\infty\right[$.