Université de Liège

1, 2, 3. . . Sciences

Année académique 2011-2012

Mathématiques générales A : corrigé du test 11

Version 1er décembre 2011

Test 11 du 21-11-2011

1. **Soit $a > 0$. Démontrer et interpréter graphiquement que si f est une fonction continue et impaire sur $[-a, a]$, alors $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.**

   Solution. Comme f est continue sur le borné fermé $[-a, a]$, f est intégrable sur $[-a, a]$ et on a

   $$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx$$

   Procédons par changement de variables pour transformer le premier terme de cette somme. Comme la fonction $g : x \mapsto -x$ est continûment dérivable sur $[0, a]$ et que

   $$\lim_{x \to a} g(x) = -a \text{ et } \lim_{x \to 0} g(x) = 0,$$

   on a

   $$\begin{aligned} \int_{-a}^{0} f(x)dx &= \int_{a}^{0} f(-x).(-1)dx \\ &= \int_{0}^{a} f(-x)dx \\ &= -\int_{0}^{a} f(x)dx \end{aligned}$$

   puisque f est impaire.
   Dès lors,

   $$\begin{aligned} \int_{-a}^{a} f(x)dx &= \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx \\ &= -\int_{0}^{a} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx \\ &= 0 \end{aligned}$$

2. **Calculer (si c'est possible) l'intégrale suivante.**

   $$\int_{0}^{1/2} 3x\, e^{-2x+1} dx$$

   Solution. La fonction $f : x \mapsto 3x\, e^{-2x+1}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0, 1/2]$, ensemble borné fermé. La fonction f est donc intégrable sur $[0, 1/2]$ et on a

   $$\begin{aligned} \int_{0}^{1/2} 3x\, e^{-2x+1} dx &= \left[3x\, \frac{e^{-2x+1}}{-2}\right]_{0}^{1/2} + \frac{3}{2}\int_{0}^{1/2} e^{-2x+1} dx \\ &= \frac{-3}{4} + \frac{3}{2}\left[\frac{e^{-2x+1}}{-2}\right]_{0}^{1/2} \\ &= -\frac{3}{4} - \frac{3}{4} + \frac{3e}{4} \\ &= \frac{-6+3e}{4} \end{aligned}$$

3. **Un garage propose deux formules de location de voitures.**
   - **Formule A : 40 euros par jour, 200 premiers km gratuits et 0,25 euro par km parcouru**
   - **Formule B : 30 euros par jour et 0,15 euro par km parcouru**

Combien de km doit-on parcourir pour que la formule B coûte moins cher que la formule A si on veut louer une voiture pour 2 jours ?

Solution. Soit x le nombre de kilomètres parcourus. En deux jours, la formule B coûte 2 . 30+0,15x euros et la formule A coûte $\begin{cases} 2 \,.\, 40 \text{ euros si } x < 200 \\ 2 \,.\, 40+0{,}25(x\text{-}200) \text{ si } x \geq 200. \end{cases}$

Dès lors,
- si $x < 200$, la formule B est plus avantageuse si

$$\begin{aligned} 60 + 0,15x &< 80 \\ \Leftrightarrow 0,15x &< 20 \\ \Leftrightarrow x &< 133,33... \end{aligned}$$

- si $x \geq 200$, la formule B est plus avantageuse si

$$\begin{aligned} 60 + 0,15x &< 80 + 0,25(x - 200) \\ \Leftrightarrow 60 + 0,15x &< 80 + 0,25x - 50 \\ \Leftrightarrow 30 &< 0,10x \\ \Leftrightarrow 300 &< x \end{aligned}$$

Au total, la formule B coûte moins cher si on parcourt moins de 133,33 km ou plus de 300 km.

Test 11 du 28-11-2011

1. – **Quand dit-on qu'une fonction est intégrable sur** $[-2,3[$ **?**

   Solution. Soit f une fonction continue sur $[-2,3[$. Si $\lim_{t\to 3}\int_{-2}^{t}|f(x)|dx$ est fini, on dit que f est intégrable sur $[-2,3[$.

   – **Que devient cette définition si la fonction considérée est négative sur** $[-2,3[$ **?**

   Solution. Soit f une fonction continue et négative sur $[-2,3[$. Si $\lim_{t\to 3}\int_{-2}^{t}f(x)dx$ est fini, on dit que f est intégrable sur $[-2,3[$.

2. **Calculer (si c'est possible) l'intégrale suivante.**

$$\int_0^{\pi}(x+2)\cos(3x)dx$$

   Solution. La fonction $f : x \mapsto (x+2)\cos(3x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0,\pi]$, ensemble borné fermé. La fonction f est donc intégrable sur $[0,\pi]$ et on a

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}(x+2)\cos(3x)dx &= \left[(x+2)\frac{\sin(3x)}{3}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{\sin(3x)}{3}dx\\ &= 0+\left[\frac{\cos(3x)}{9}\right]_0^{\pi}\\ &= -\frac{1}{9}-\frac{1}{9}\\ &= -\frac{2}{9}\end{aligned}$$

3. **Un garage propose deux formules de location de voitures.**

   – **Formule A : 25 euros par jour, 150 premiers km gratuits et 0,20 euro par km parcouru**

   – **Formule B : 20 euros par jour et 0,10 euro par km parcouru**

   Combien de km doit-on parcourir pour que la formule B coûte moins cher que la formule A si on veut louer une voiture pour 2 jours ?

   Solution. Soit x le nombre de kilomètres parcourus. En deux jours, la formule B coûte 2 . 20+0,10x euros et la formule A coûte $\begin{cases} 2\ .\ 25 \text{ euros si } x<150\\ 2\ .\ 25+0{,}20(x\text{-}150) \text{ si } x\geq 150.\end{cases}$

   Dès lors,

   - si $x<150$, la formule B est plus avantageuse si

$$\begin{aligned}40+0,10x &< 50\\ \Leftrightarrow 0,10x &< 10\\ \Leftrightarrow x &< 100\end{aligned}$$

   - si $x\geq 150$, la formule B est plus avantageuse si

$$\begin{aligned}40+0,10x &< 50+0,20(x-150)\\ \Leftrightarrow 40+0,10x &< 50+0,20x-30\\ \Leftrightarrow 20 &< 0,10x\\ \Leftrightarrow 200 &< x\end{aligned}$$

   Au total, la formule B coûte moins cher si on parcourt moins de 100 km ou plus de 200 km.

Test 11 du 29-11-2011

1. – **Quand dit-on qu'une fonction est intégrable sur** $]2,4]$ **?**

   Solution. Soit f une fonction continue sur $]2,4]$. Si $\lim_{t\to 2}\int_t^4 |f(x)|dx$ est fini, on dit que f est intégrable sur $]2,4]$.

   – **Que devient cette définition si la fonction considérée est positive sur** $]2,4]$ **?**

   Solution. Soit f une fonction continue et positive sur $]2,4]$. Si $\lim_{t\to 2}\int_t^4 f(x)dx$ est fini, on dit que f est intégrable sur $]2,4]$.

2. **Calculer (si c'est possible) l'intégrale suivante.**

$$\int_{-2}^{-1}(x+1)\ln(-3x)dx$$

Solution. La fonction $f : x \mapsto (x+1)\ln(-3x)$ est continue sur $]-\infty,0[$ donc sur $[-2,-1]$, ensemble borné fermé. La fonction f est donc intégrable sur $[-2,-1]$ et on a

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^{-1}(x+1)\ln(-3x)dx &= \left[\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\ln(-3x)\right]_{-2}^{-1} - \int_{-2}^{-1}\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\frac{1}{x}dx\\
&= -\frac{1}{2}\ln(3) - 0 - \int_{-2}^{-1}\left(\frac{x}{2}+1\right)dx\\
&= -\frac{1}{2}\ln(3) - \left[\frac{x^2}{4}+x\right]_{-2}^{-1}\\
&= -\frac{1}{2}\ln(3) - \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

3. **Un garage propose deux formules de location de voitures.**
   – **Formule A : 45 euros par jour, 50 premiers km gratuits et 0,25 euro par km parcouru**
   – **Formule B : 40 euros par jour et 0,20 euro par km parcouru**
   Combien de km doit-on parcourir pour que la formule B coûte moins cher que la formule A si on veut louer une voiture pour 2 jours ?

Solution. Soit x le nombre de kilomètres parcourus. En deux jours, la formule B coûte 2 . 40+0,20x euros et la formule A coûte $\begin{cases} 2 \;.\; 45 \text{ euros si } x < 50 \\ 2 \;.\; 45+0{,}25(x\text{-}50) \text{ si } x \geq 50. \end{cases}$

Dès lors,
- si $x < 50$, la formule B est plus avantageuse si

$$\begin{aligned}
80+0,20x &< 90\\
\Leftrightarrow 0,20x &< 10\\
\Leftrightarrow x &< 50
\end{aligned}$$

- si $x \geq 50$, la formule B est plus avantageuse si

$$\begin{aligned}
80+0,20x &< 90+0,25(x-50)\\
\Leftrightarrow 80+0,20x &< 90+0,25x-12,5\\
\Leftrightarrow 2,5 &< 0,05x\\
\Leftrightarrow 50 &< x
\end{aligned}$$

Au total, la formule B coûte moins cher quel que soit le nombre de kilomètres parcourus.

Test 11 du 30-11-2011

1. – **Quand dit-on qu'une fonction est intégrable sur $]-1,2]$?**

   Solution. Soit f une fonction continue sur $]-1,2]$. Si $\lim_{t\to -1} \int_t^2 |f(x)|dx$ est fini, on dit que f est intégrable sur $]-1,2]$.

   – **Que devient cette définition si la fonction considérée est négative sur $]-1,2]$?**

   Solution. Soit f une fonction continue et négative sur $]-1,2]$. Si $\lim_{t\to -1} \int_t^2 f(x)dx$ est fini, on dit que f est intégrable sur $]-1,2]$.

2. **Calculer (si c'est possible) l'intégrale suivante.**

$$\int_0^{\pi/4} x\sin(2x)dx$$

Solution. La fonction $f : x \mapsto x\sin(2x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0,\pi/4]$, ensemble borné fermé. La fonction f est donc intégrable sur $[0,\pi/4]$ et on a

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/4} x\sin(2x)dx &= \left[x\,\frac{-\cos(2x)}{2}\right]_0^{\pi/4} + \int_0^{\pi/4} \frac{\cos(2x)}{2}dx \\ &= 0 + \left[\frac{\sin(2x)}{4}\right]_0^{\pi/4} \\ &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

3. **Un garage propose deux formules de location de voitures.**

   – **Formule A : 40 euros par jour, 100 premiers km gratuits et 0,30 euro par km parcouru**

   – **Formule B : 30 euros par jour et 0,20 euro par km parcouru**

   Combien de km doit-on parcourir pour que la formule B coûte moins cher que la formule A si on veut louer une voiture pour 2 jours ?

Solution. Soit x le nombre de kilomètres parcourus. En deux jours, la formule B coûte 2 . 30+0,20x euros et la formule A coûte $\begin{cases} 2\ .\ 40 \text{ euros si } x < 100 \\ 2\ .\ 40+0{,}30(x\text{-}100) \text{ si } x \geq 100. \end{cases}$

Dès lors,
- si $x < 100$, la formule B est plus avantageuse si

$$\begin{aligned} 60 + 0,20x &< 80 \\ \Leftrightarrow 0,20x &< 20 \\ \Leftrightarrow x &< 100 \end{aligned}$$

- si $x \geq 100$, la formule B est plus avantageuse si

$$\begin{aligned} 60 + 0,20x &< 80 + 0,30(x-100) \\ \Leftrightarrow 60 + 0,20x &< 80 + 0,30x - 30 \\ \Leftrightarrow 10 &< 0,10x \\ \Leftrightarrow 100 &< x \end{aligned}$$

Au total, la formule B coûte moins cher quel que soit le nombre de kilomètres parcourus.