Université de Liège

1, 2, 3... Sciences

Année académique 2011-2012

Mathématiques générales A : corrigé du test 12

Version 9 décembre 2011

Mathématiques générales A : 1er bachelier informatique
Correction du test 12

1. **Soit f une fonction continue sur $]2,6]$. Définir l'intégrabilité de f sur $]2,6]$ puis citer le critère d'intégrabilité en θ pouvant être utilisé pour prouver l'intégrabilité de f sur $]2,6]$.**

   Solution.
   Soit f une fonction continue sur $]2,6]$. Si la limite $\lim\limits_{t\to 2}\int_t^6 |f(x)|dx$ est finie, on dit que f est intégrable sur $]2,6]$.
   Pour prouver l'intégrabilité de f sur $]2,6]$, on peut utiliser le critère en θ suivant : S'il existe $C>0$ et $\theta<1$ tels que $|f(x)| \leq \frac{C}{(x-2)^\theta}$ sur $]2,6]$, alors f est intégrable sur $]2,6]$. Cela arrive notamment s'il existe $\theta<1$ tel que

   $$\text{la limite } \lim_{x\to 2^+} |f(x)|(x-2)^\theta \text{ existe et est finie.}$$

2. **Résoudre l'équation suivante dans $\mathbb{C}$ et représenter ses solutions dans le plan muni d'un repère orthonormé ("X=axe réel" et "Y= axe imaginaire").**

   $$5+2x+x^2=0$$

   Solution. Calculons le discriminant de l'équation donnée. On obtient $\Delta = 4-4.5.1 = -16 = 16.i^2$. Dès lors, les racines de Δ sont $4i$ et $-4i$ et les solutions de l'équation donnée sont

   $$x_1 = \frac{-2+4i}{2} = -1+2i \text{ et } x_2 = \frac{-2-4i}{2} = -1-2i.$$

   L'ensemble des solutions est donc $S=\{-1+2i,-1-2i\}$.

3. **Les âges de deux soeurs diffèrent de 4 ans. Dans 13 ans, à elles deux, elles auront 44 ans. Quel âge ont-elles cette année ?**

   Solution.
   Soit x l'âge actuel de la soeur cadette. L'âge actuel de sa soeur ainée est alors $x+4$ et on a

   $$\begin{array}{rcl} x+13+(x+4)+13 & = & 44 \\ \Leftrightarrow 2x+30 & = & 44 \\ \Leftrightarrow 2x & = & 14 \\ \Leftrightarrow x & = & 7 \end{array}$$

   Dès lors, la plus jeune des deux soeurs a 7 ans et son ainée a $7+4=11$ ans.

Mathématiques générales A : 1er bachelier sciences physiques, chimiques et géologiques
Correction du test 12

1. – **Définir le conjugué d'un nombre complexe.**

   Solution. Soit $z = (a, b) = a + ib$ un complexe ($a, b \in \mathbb{R}$). Le complexe conjugué de z, noté $\bar{z}$, est le complexe
   $$\bar{z} = (a, -b) = a - ib,$$
   c'est-à-dire le complexe qui a la même partie réelle que z mais dont la partie imaginaire est l'opposé de celle de z.

   – **Que peut-on dire des représentations d'un nombre complexe et de son conjugué dans le plan complexe ?**

   Solution. Les points images d'un complexe et de son conjugué sont l'image l'un de l'autre pas la symétrie orthogonale d'axe X.

   – **Enoncer une propriété reliant un nombre complexe, son conjugué et son module.**

   Solution.
   $|z|^2 = z.\bar{z}$ pour tout complexe z.

2. **Calculer (si c'est possible) l'intégrale suivante**

$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^3}\, dx$$

Solution.
La fonction $f : x \mapsto x^2 e^{-x^3}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0, +\infty[$ non borné.
Vérifions l'intégrabilité de f en $+\infty$. Pour cela calculons la limite $\lim_{t \to +\infty} \int_0^t x^2 e^{-x^3} dx$ puisque $|f| = f$.
Soit $t \in]0, +\infty[$, comme la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, elle est aussi continue sur $[0, t]$ borné fermé. Donc f est intégrable sur $[0, t]$ et une primitive de f est donnée par

$$\begin{aligned}
\int x^2 e^{-x^3} dx &= -\frac{1}{3} \int -3x^2 e^{-x^3} dx \\
&\simeq -\frac{1}{3} \left[\int e^t dt \right]_{t=-x^3} \\
&\simeq -\frac{1}{3} \left[e^t \right]_{t=-x^3} \\
&\simeq -\frac{e^{-x^3}}{3}, \; x \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\lim_{t \to +\infty} \int_0^t x^2 e^{-x^3} dx &= \lim_{t \to +\infty} \left(\left[-\frac{e^{-x^3}}{3} \right]_0^t \right) \\
&= \lim_{t \to +\infty} \left(-\frac{e^{-t^3}}{3} \right) + \frac{e^0}{3} \\
&= 0 + \frac{1}{3} \\
&= \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Comme cette limite est finie, la fonction f est intégrable sur $[0, +\infty[$ et comme la fonction f est positive sur cet intervalle, on a

$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^3} dx = \frac{1}{3}.$$

Pour vérifier l'intégrabilité de la fonction en $+\infty$, on peut également utiliser un critère en θ de la manière suivante : calculons la limite suivante

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}(x^2|x^2e^{-x^3}|) &= \lim_{x\to+\infty}(x^4e^{-x^3}) \\
&= \lim_{y\to+\infty}(y^{4/3}e^{-y}) \text{ car } \lim_{x\to+\infty}x^3=+\infty \\
&= 0 \quad \text{(exemple fondamental découlant du théorème de l'Hospital}^{1}\text{)}
\end{aligned}$$

Comme cette limite existe et est finie, par le critère d'intégration en θ avec $\theta = 2 > 1$, f est intégrable en $+\infty$ donc finalement sur $[0, +\infty[$.

3. **Les âges de deux soeurs diffèrent de 3 ans. Dans 12 ans, à elles deux, elles auront 53 ans. Quel âge ont-elles cette année ?**

   Solution.
   Soit x l'âge actuel de la soeur cadette. L'âge actuel de sa soeur ainée est alors $x+3$ et on a

$$\begin{aligned}
x+12+(x+3)+12 &= 53 \\
\Leftrightarrow 2x+27 &= 53 \\
\Leftrightarrow 2x &= 26 \\
\Leftrightarrow x &= 13
\end{aligned}$$

   Dès lors, la plus jeune des deux soeurs a 13 ans et son ainée a $13+3=16$ ans.

1. ATTENTION : Dans le cadre d'un exercice sur les limites, il faudrait vérifier les hypothèses du théorème de l'Hospital et l'appliquer 2 fois.

Mathématiques générales A : 1er bachelier sciences biologiques et géographiques
Correction du test 12 du 2-12-2011

1. – **Définir le module d'un nombre complexe.**

   Solution. Soit $z = (a, b) = a + ib$ un complexe ($a, b \in \mathbb{R}$). Le module du complexe z, noté $|z|$, est le nombre réel positif
   $$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

   – **Quelle est son interprétation graphique dans le plan complexe ?**

   Solution. Le module du complexe $z = a + ib$ est la longueur du vecteur d'origine $\mathcal{O}$ et dont l'extrémité est le point du plan de coordonnées (a, b).

   – **Enoncer une propriété reliant un nombre complexe, son conjugué et son module.**

   Solution. $|z|^2 = z.\bar{z}$ pour tout complexe z.

2. **Calculer (si c'est possible) l'intégrale suivante**
$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{9x^2 + 12x + 4} dx$$

Solution.
La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{9x^2+12x+4} = \frac{1}{(3x+2)^2}$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{-2}{3}\}$ donc sur $[0, +\infty[$ non borné.
Vérifions l'intégrabilité de f en $+\infty$. Pour cela calculons la limite $\lim_{t \to +\infty} \int_0^t \frac{1}{9x^2+12x+4} dx$ puisque $|f| = f$.
Une primitive de f est donnée par
$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{9x^2 + 12x + 4} dx &= \int \frac{1}{(3x + 2)^2} dx \\
&\simeq \frac{1}{3} \int \frac{3}{(3x + 2)^2} dx \\
&\simeq \frac{1}{3} \left[\int \frac{1}{t^2} dt \right]_{t=3x+2} \\
&\simeq \frac{1}{3} \left[\frac{-1}{t} \right]_{t=3x+2} \\
&\simeq \frac{-1}{9x + 6}, \ x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{2}{3} \right\}
\end{aligned}$$

Ainsi,
$$\begin{aligned}
\lim_{t \to +\infty} \left(\int_0^{+\infty} \frac{1}{9x^2 + 12x + 4} dx \right) &= \lim_{t \to +\infty} \left(\left[\frac{-1}{9x + 6} \right]_0^t \right) \\
&= \lim_{t \to +\infty} \left(\frac{-1}{9t + 6} \right) - \left(\frac{-1}{6} \right) \\
&= 0 + \frac{1}{6} \\
&= \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

Comme cette limite est finie, la fonction f est intégrable sur $[0, +\infty[$ et comme la fonction f est positive sur cet intervalle, on a
$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{9x^2 + 12x + 4} dx = \frac{1}{6}.$$

Pour vérifier l'intégrabilité de la fonction en $+\infty$, on peut également utiliser un critère en θ de la manière suivante : calculons la limite suivante
$$\begin{aligned}
\lim_{x \to +\infty} \left(x^2 \left| \frac{1}{9x^2 + 12x + 4} \right| \right) &= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{9x^2} \\
&= \frac{1}{9}.
\end{aligned}$$

Comme cette limite existe et est finie, par le critère d'intégration en θ avec $\theta = 2 > 1$, f est intégrable en $+\infty$ donc finalement sur $[0, +\infty[$.

3. **Les âges de deux soeurs diffèrent de 5 ans. Dans 11 ans, à elles deux, elles auront 51 ans. Quel âge ont-elles cette année ?**

   Solution. Soit x l'âge actuel de la soeur cadette. L'âge actuel de sa soeur ainée est alors $x + 5$ et on a

$$\begin{aligned} x + 11 + (x + 5) + 11 &= 51 \\ \Leftrightarrow 2x + 27 &= 51 \\ \Leftrightarrow 2x &= 24 \\ \Leftrightarrow x &= 12 \end{aligned}$$

   Dès lors, la plus jeune des deux soeurs a 12 ans et son ainée a $12 + 5 = 17$ ans.