1, 2, 3... Sciences

Année académique 2011-2012

Mathématiques générales A : corrigé du test 13

Version 15 décembre 2011

Test 13 du 12-12-2011

1. **On donne l'EDLCC** $4Df(x) + 2f(x) = 2$.
   (a) **Que signifient les initiales EDLCC ?**
   Solution. Ces initiales signifient Equation Différentielle Linéaire à Coefficients Constants.
   (b) **Donner l'ordre de cette EDLCC.**
   Solution. L'EDLCC donnée est d'ordre 1.
   (c) **Donner l'équation homogène associée à l'EDLCC donnée.**
   Solution. L'équation homogène associée à l'équation donnée est $4Df(x) + 2f(x) = 0$.
   (d) **Donner l'équation caractéristique associée à cette équation homogène.**
   Solution. L'équation caractéristique associée à l'équation homogène est $4z + 2 = 0$.
2. **Résoudre l'équation suivante dans $\mathbb{C}$.**

$$x^2 + 1 - ix = 0$$

Solution. Calculons le discriminant de l'équation donnée. On obtient

$$\Delta = (-i)^2 - 4.1.1 = -1 - 4 = -5 = 5.i^2.$$

Dès lors, les racines de Δ sont $i\sqrt{5}$ et $-i\sqrt{5}$ et les solutions de l'équation donnée sont

$$x_1 = \frac{i + i\sqrt{5}}{2} = \frac{(\sqrt{5}+1)i}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{i - i\sqrt{5}}{2} = \frac{(1-\sqrt{5})i}{2}.$$

L'ensemble des solutions est donc $S = \left\{\frac{(1+\sqrt{5})i}{2}, \frac{(1-\sqrt{5})i}{2}\right\}$.

3. **Un homme dépense le quart de son salaire pour son logement et les deux cinquièmes pour la nourriture. Il lui reste alors 378 euros pour les autres dépenses. Quel est son salaire mensuel ?**

Solution. Soit x le salaire mensuel de l'homme en euros. On a

$$\begin{aligned} x - \frac{1}{4}x - \frac{2}{5}x &= 378 \\ \Leftrightarrow \frac{7x}{20} &= 378 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{20}{7}.378 \\ \Leftrightarrow x &= 1080 \end{aligned}$$

Dès lors, le salaire mensuel de l'homme est de 1080 euros.

Test 13 du 13-12-2011

1. **On donne l'EDLCC** $-3D^2 f(x) + f(x) = -2$.
   (a) **Que signifient les initiales EDLCC ?**
   Solution. Ces initiales signifient Equation Différentielle Linéaire à Coefficients Constants.
   (b) **Donner l'ordre de cette EDLCC.**
   Solution. L'EDLCC donnée est d'ordre 2.
   (c) **Donner l'équation homogène associée à l'EDLCC donnée.**
   Solution. L'équation homogène associée à l'équation donnée est $-3D^2 f(x) + f(x) = 0$.
   (d) **Donner l'équation caractéristique associée à cette équation homogène.**
   Solution. L'équation caractéristique associée à l'équation homogène est $-3z^2 + 1 = 0$.
2. **Résoudre l'équation suivante dans $\mathbb{C}$.**

$$2x^2 + ix = -3$$

Solution. On a

$$2x^2 + ix = -3 \Leftrightarrow 2x^2 + ix + 3 = 0.$$

Calculons le discriminant de cette équation. On obtient

$$\Delta = (i)^2 - 4.2.3 = -1 - 24 = -25 = 25.i^2.$$

Dès lors, les racines de Δ sont $5i$ et $-5i$ et les solutions de l'équation donnée sont

$$x_1 = \frac{-i + 5i}{4} = \frac{4i}{4} = i \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-i - 5i}{4} = \frac{-6i}{4} = \frac{-3i}{2}.$$

L'ensemble des solutions est donc $S = \left\{i, \frac{-3i}{2}\right\}$.

3. **Un homme dépense le tiers de son salaire pour son logement et les quatre neuvièmes pour la nourriture. Il lui reste alors 420 euros pour les autres dépenses. Quel est son salaire mensuel ?**

Solution. Soit x le salaire mensuel de l'homme en euros. On a

$$\begin{aligned} x - \frac{1}{3}x - \frac{4}{9}x &= 420 \\ \Leftrightarrow \frac{2x}{9} &= 420 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{9}{2}.420 \\ \Leftrightarrow x &= 1890 \end{aligned}$$

Dès lors, le salaire mensuel de l'homme est de 1890 euros.

Test 13 du 15-12-2011

1. **On donne l'EDLCC $-3Df(x) - f(x) = 1$.**
   (a) **Que signifient les initiales EDLCC ?**
   Solution. Ces initiales signifient Equation Différentielle Linéaire à Coefficients Constants.
   (b) **Donner l'ordre de cette EDLCC.**
   Solution. L'EDLCC donnée est d'ordre 1.
   (c) **Donner l'équation homogène associée à l'EDLCC donnée.**
   Solution. L'équation homogène associée à l'équation donnée est $-3Df(x) - f(x) = 0$.
   (d) **Donner l'équation caractéristique associée à cette équation homogène.**
   Solution. L'équation caractéristique associée à l'équation homogène est $-3z - 1 = 0$.
2. **Résoudre l'équation suivante dans $\mathbb{C}$.**

$$2ix^2 + x = i$$

Solution. On a

$$2ix^2 + x = i \Leftrightarrow 2ix^2 + x - i = 0.$$

Calculons le discriminant de cette équation. On obtient

$$\Delta = (1)^2 - 4.2i.(-i) = 1 - 8 = -7 = 7i^2.$$

Dès lors, les racines de Δ sont $i\sqrt{7}$ et $-i\sqrt{7}$ et les solutions de l'équation donnée sont

$$x_1 = \frac{-1 + i\sqrt{7}}{4i} = \frac{\sqrt{7} + i}{4} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-1 - i\sqrt{7}}{4i} = \frac{-\sqrt{7} + i}{4}.$$

L'ensemble des solutions est donc $S = \left\{ \frac{\sqrt{7}+i}{4}, \frac{-\sqrt{7}+i}{4} \right\}$.

3. **Un homme dépense le tiers de son salaire pour son logement et les deux cinquièmes pour la nourriture. Il lui reste alors 520 euros pour les autres dépenses. Quel est son salaire mensuel ?**

Solution. Soit x le salaire mensuel de l'homme en euros. On a

$$\begin{array}{rcl} x - \frac{1}{3}x - \frac{2}{5}x & = & 520 \\ \Leftrightarrow \frac{4x}{15} & = & 520 \\ \Leftrightarrow x & = & \frac{15}{4}.520 \\ \Leftrightarrow x & = & 1950 \end{array}$$

Dès lors, le salaire mensuel de l'homme est de 1950 euros.