1, 2, 3...Sciences

Année académique 2011-2012

Mathématique et physique : 1er bachelier

Test du 16-09-11

Correction

$\boxed{\textbf{Problèmes élémentaires}}$

Rédiger une solution des problèmes simples suivants.
Mathématique :
1) Une citerne cylindrique a une base circulaire de $2\ m$ de rayon. Lors d'un orage, le niveau de son eau s'élève de $1\ cm$. A combien de litres par m^2 cela correspond-il ?

$\boxed{\textbf{\textit{Solution.}}}$ Lors de l'orage, le volume a augmenté de $2^2\ \pi\ .\ 10^{-2}\ m^3$, c'est-à-dire $40\ \pi\ dm^3$. Ce volume correspond à une capacité de $40\ \pi$ litres. Comme l'aire de la base de la citerne est égale à $4\ \pi\ m^2$, on en déduit qu'il a plu $10\ \ell/m^2$.

2) Si le réel exprimant le périmètre d'un carré évalué en mm est égal au réel exprimant sa surface évaluée en cm^2, que vaut la longueur d'un de ses côtés (en mètres) ?

$\boxed{\textbf{\textit{Solution.}}}$ Soit $x > 0$ la longueur en mètres d'un côté du carré.
Le périmètre évalué en mm vaut donc $4\ .\ 10^3 x\ mm$ et la surface évaluée en cm^2 vaut $10^4\ x^2\ cm^2$.
Puisque ces réels sont égaux, on a l'égalité

$$4\ .10^3 x = 10^4 x^2 \Leftrightarrow 10^3 x(10x-4) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \ \text{ ou } \ x = 0,4.$$

Dès lors, la longueur d'un côté du carré est 0,4 m.

Physique :
Sur Terre, en négligeant les frottements de l'air, donner une approximation, en nombre entier de secondes, du temps de chute d'un corps lâché d'une altitude de $80\,\mathrm{m}$.

$\boxed{\textbf{\textit{Solution.}}}$ Si $t \in \mathbb{N}_0$ est le temps de chute du corps exprimé en secondes, on a $80 = \frac{1}{2}gt^2$, g étant l'accélération due à la pesanteur à la surface de la Terre.
En prenant g égal à 10 m/s^2, on a alors $16 = t^2 \Leftrightarrow t = 4$ puisque $t > 0$. Ainsi, un corps lâché à 80 m met approximativement 4 secondes avant de toucher le sol.

$\boxed{\textbf{Transcodage}}$

1. **Exprimer en français la propriété ci-dessous** (**ATTENTION** : il n'est **pas** question de **se limiter à une lecture de symboles**. Par exemple, on exprime « $a + b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ » par « la somme de deux réels » et non « a plus b avec a, b appartenant à $\mathbb{R}$ ») :

$$\ln(ab) = \ln a \ + \ \ln b,\ \ a, b \in]0, +\infty[.$$

$\boxed{\textbf{\textit{Solution.}}}$ Le logarithme népérien d'un produit de 2 réels strictement positifs est égal à la somme des logarithmes népériens de chacun des facteurs.

2. **Exprimer en symboles mathématiques la phrase entre guillemets :**
« l'énergie cinétique d'un corps est égale à la moitié du produit de sa masse par le carré de sa vitesse ».

$\boxed{\textbf{\textit{Solution.}}}$ Si E_c est l'énergie cinétique d'un corps de masse m animé d'une vitesse v, alors on a

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

$\boxed{\textbf{Techniques de calcul}}$

1. **Résoudre** (a) $\dfrac{5}{3}x - \dfrac{1}{4} = \dfrac{x}{8}$ (b) $x^2 - 1 = x$ (c) $x - 1 \leq \dfrac{1}{x-1}$

Solution.

1. (a) On a
$$\frac{5}{3}x-\frac{1}{4}=\frac{x}{8}\Leftrightarrow\frac{(40-3)x}{24}=\frac{6}{24}.$$
En multipliant les deux membres par $\frac{24}{37}$, on obtient $x=\frac{6}{37}$.
Dès lors, l'ensemble des solutions est l'ensemble $S=\left\{\frac{6}{37}\right\}$.

(b) L'équation donnée est équivalente à $x^2-x-1=0$. Comme son réalisant $\Delta=(-1)^2-4.1.(-1)=5$, les solutions sont $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.
Dès lors, l'ensemble des solutions est l'ensemble $S=\left\{\dfrac{1-\sqrt{5}}{2},\ \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

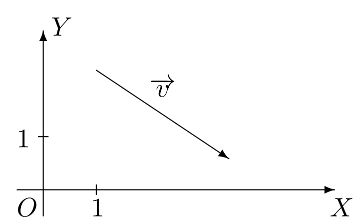
(c) Si $x\neq 1$, l'inéquation donnée est équivalente à $\dfrac{(x-1)^2-1}{x-1}\leq 0\Leftrightarrow\dfrac{x(x-2)}{x-1}\leq 0$. En étudiant le signe du premier membre, on a $x\leq 0$ ou $x\in\,]1,2]$.
Dès lors, l'ensemble des solutions est l'ensemble $S=]-\infty,0]\cup\,]1,2]$.

2. **Résoudre** $\sin(2x)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **et donner les solutions dans** $[\pi,3\pi]$.

Solution. L'équation donnée est équivalente à $\sin(2x)=\sin\frac{\pi}{3}$ qui a pour solutions
$$2x=\frac{\pi}{3}+2k\pi\ \text{ ou } 2x=\pi-\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+k\pi\ \text{ ou } x=\frac{\pi}{3}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$$
L'ensemble des solutions dans $[\pi,3\pi]$ est alors $S=\left\{\dfrac{7\pi}{6},\ \dfrac{4\pi}{3},\ \dfrac{13\pi}{6},\ \dfrac{7\pi}{3}\right\}$.

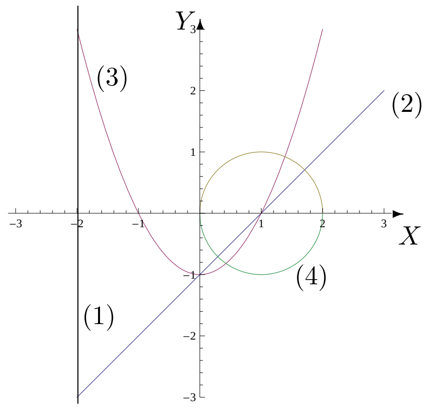
Représentation graphique

1. **Dans un repère orthonormé du plan, on donne le vecteur libre $\overrightarrow{v}$ par la représentation ci-contre. On suppose que la mesure de l'angle entre ce vecteur et le vecteur de base de l'axe X est $\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$ et que la longueur du vecteur (c'est-à-dire sa norme) est égale à $r>0$. Dans ce cas, en utilisant les données et les notations de l'énoncé, que vaut la deuxième composante du vecteur $\overrightarrow{v}$?**



Solution. Avec les notations de l'énoncé, la deuxième composante du vecteur $\overrightarrow{v}$ est $-r\sin(\theta)$.

2. **Dans un même repère orthonormé, représenter les courbes dont voici les équations en accompagnant le graphique du numéro de l'équation**
   (1) $x+2=0$
   (2) $x-y-1=0$
   (3) $x^2-y-1=0$
   (4) $x^2+y^2-2x=0$



$\boxed{\textbf{QCM}}$ (Réponse correcte : +1 ; réponse incorrecte : -0,25 ; pas de réponse : 0)

Pour chacune des questions suivantes, choisir parmi les différentes affirmations celle qui est correcte et l'encadrer ou la surligner.

1. Si on divise par trois la longueur des côtés d'un rectangle, alors
   (a) l'aire de ce rectangle est divisée par 3
   (b) ♣ le périmètre de ce rectangle est divisé par 3
   (c) le volume du parallélipipède dont les bases sont composées de ce rectangle et dont la hauteur n'est pas modifiée est divisé par 3
   (d) il est nécessaire de connaître la taille initiale des côtés du rectangle pour pouvoir répondre à cette question
   (e) aucune des propositions précédentes n'est correcte
2. Si on achète un article soldé de 40 %, cela signifie que, pour connaître son prix de départ, le prix soldé doit être
   (a) multiplié par 0,4 (b) multiplié par 0,6
   (c) divisé par 0,4 (d) ♣ divisé par 0,6
   (e) aucune des propositions précédentes n'est correcte
3. Un quart d'un récipient est rempli d'eau. On ajoute alors une quantité d'eau égale aux deux tiers du volume libre restant. Au total, quelle part du volume du récipient a-t-on remplie d'eau ?
   (a) 5/12 (b) 3/7 (c) ♣ 3/4 (d) 1
   (e) aucune des propositions précédentes n'est correcte
4. La force gravitationnelle entre deux objets est donnée par la formule suivante
   $$F = \frac{Gm_1m_2}{d^2}$$
   où G est la constante gravitationnelle, m_1 et m_2 sont les masses des deux objets et d est la distance qui les sépare.
   Si on remplace l'un des deux objets par un objet deux fois plus massif, comment la distance d doit-elle être modifiée pour laisser la force gravitationnelle inchangée ?
   (a) Elle doit être divisée par $\sqrt{2}$ (b) ♣ Elle doit être multipliée par $\sqrt{2}$
   (c) Elle doit être divisée par 2 (d) Elle doit être multipliée par 2
   (e) Elle doit être divisée par 4
5. Le graphique ci-dessous représente la position x en fonction du temps t d'un mobile qui se déplace de manière rectiligne. Si b et c sont deux constantes réelles positives, laquelle des expressions données décrit le mieux l'accélération a du mobile ?
   (a) $a(t) = 0$
   (b) $a(t) = +b$
   (c) $a(t) = -c$
   (d) $a(t) = b + ct$
   (e) ♣ $a(t) = b - ct$