1, 2, 3... Sciences

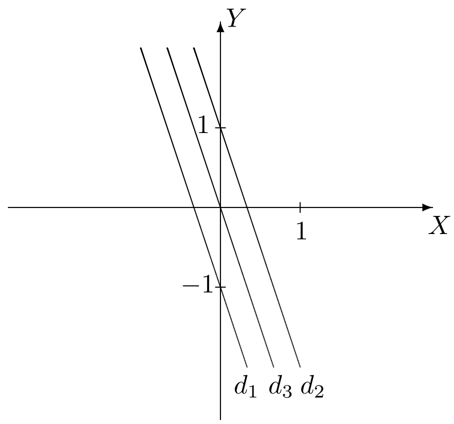
Année académique 2011-2012

Mathématiques générales B : corrigé du test 1

Version 13 mars 2012

Test 1 du 05-03-2012

1. **On donne la fonction f par $f(x,y) = \mathrm{tg}\,(\arccos(3x+y))$.**
   (a) **Déterminer les domaines de définition et de dérivabilité de f et les représenter.**
   Solution. Le domaine de définition de f est l'ensemble
   $$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq 3x+y \leq 1,\ \arccos(3x+y) \neq \frac{\pi}{2}\right\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq 3x+y \leq 1,\ 3x+y \neq 0\}.$$
   Le domaine de dérivabilité de f est l'ensemble
   $$B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < 3x+y < 1,\ \arccos(3x+y) \neq \frac{\pi}{2}\right\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < 3x+y < 1,\ 3x+y \neq 0\}.$$



   L'ensemble A est l'ensemble des points situés entre les droites d_1 et d_2 exceptés ceux de d_3, les points des droites d_1 et d_2 étant compris dans A.

   L'ensemble B est l'ensemble des points situés entre les droites d_1 et d_2 exceptés ceux de d_3, les points des droites d_1 et d_2 n'étant pas compris dans B.

   Les droites d_1, d_2 et d_3 ont respectivement pour équation cartésienne $y = -3x-1$, $y = -3x+1$ et $y = -3x$.

   (b) **Calculer la dérivée partielle de f par rapport à sa première variable.**
   Solution. La dérivée partielle de f par rapport à sa première variable est donnée par
   $$D_x f(x,y) = \frac{1}{\cos^2(\arccos(3x+y))} \cdot \frac{(-1)}{\sqrt{1-(3x+y)^2}} \cdot 3 = \frac{-3}{(3x+y)^2\sqrt{1-(3x+y)^2}}.$$

2. **Soit $F(x) = g(u(x), v(x))$ avec $u(2) = -1$, $v(2) = 2$, $(Du)(2) = -3$, $(Dv)(2) = 4$, $(D_u g)(-1,2) = 7$ et $(D_v g)(-1,2) = -5$. Si F est dérivable en 2, que vaut $DF(2)$?**
   Solution. Si F est dérivable en 2, on a
   $$DF(2) = (D_u g)(u(2), v(2)) \,.\, (Du)(2) + (D_v g)(u(2), v(2)) \,.\, (Dv)(2) = 7 \,.\, (-3) + (-5) \,.\, 4 = -21-20 = -41.$$

3. **Calculer, si elle existe, l'intégrale suivante**
   $$\int_{-1}^{0} \left(\int_{-\infty}^{y} e^{x+3y} dx\right) dy.$$

   Solution. La fonction $f : (x,y) \mapsto e^{x+3y}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}^2$ donc sur $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [-1,0],\ x \in]-\infty, y]\}$, ensemble non borné parallèle aux 2 axes.
   Si y est fixé dans $[-1,0]$, la fonction $g : x \mapsto e^x.e^{3y}$ est continue sur $]-\infty, y]$.
   Etudions son intégrabilité en $-\infty$ en calculant la limite $L = \lim_{t \to -\infty} \int_t^y e^{3y}.e^x\, dx$. Si cette limite est finie alors g est intégrable sur $]-\infty, y]$ et la valeur de la limite est l'intégrale de g sur $]-\infty, y]$. On a
   $$L = \lim_{t \to -\infty} (e^{3y}[e^x]_t^y) = e^{4y} - e^{3y} \lim_{t \to -\infty} e^t = e^{4y},$$
   limite finie puisque y est fixé dans $[-1,0]$.
   La fonction $h : y \mapsto e^{4y}$ est continue sur le fermé borné $[-1,0]$ donc est intégrable sur cet ensemble.
   Ainsi, f est intégrable sur A et
   $$\int_{-1}^{0} \left(\int_{-\infty}^{y} e^{x+3y} dx\right) dy = \int_{-1}^{0} e^{4y}\, dy = \frac{1}{4}[e^{4y}]_{-1}^{0} = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{e^4}\right).$$

Test 1 du 07-03-2012

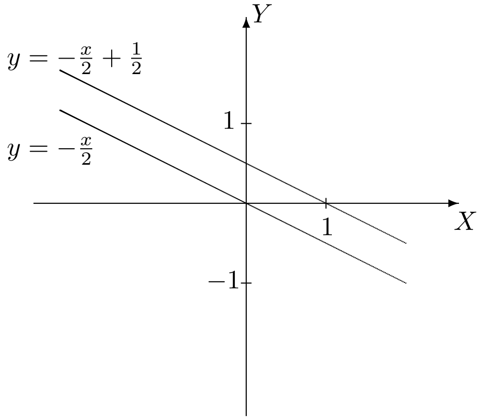
1. **On donne la fonction f par $f(x,y)=\ln(\arcsin(x+2y))$.**

   (a) **Déterminer les domaines de définition et de dérivabilité de f et les représenter.**
   Solution. Le domaine de définition de f est l'ensemble

   $$A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : -1\leq x+2y\leq 1,\ \arcsin(x+2y)>0\right\}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0<x+2y\leq 1\}.$$

   Le domaine de dérivabilité de f est l'ensemble

   $$B=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : -1<x+2y<1,\ \arcsin(x+2y)>0\right\}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0<x+2y<1\}.$$



   L'ensemble A est l'ensemble des points situés entre les droites, ceux de la droite d'équation $y=-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}$ étant compris dans A mais ceux de l'autre droite étant exclus de A.

   L'ensemble B est l'ensemble des points situés entre les droites, les points des droites n'étant pas compris dans B.

   (b) **Calculer la dérivée partielle de f par rapport à sa deuxième variable.**
   Solution. La dérivée partielle de f par rapport à sa deuxième variable est donnée par

   $$D_yf(x,y)=\frac{1}{\arcsin(x+2y)}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-(x+2y)^2}}\cdot 2=\frac{2}{\arcsin(x+2y)\sqrt{1-(x+2y)^2}}.$$

2. **Soit $F(x)=g(u(x),v(x))$ avec $u(0)=1$, $v(0)=-2$, $(Du)(0)=-1$, $(Dv)(0)=3$, $(D_ug)(1,-2)=4$ et $(D_vg)(1,-2)=-5$. Si F est dérivable en 0, que vaut $DF(0)$?**

   Solution. Si F est dérivable en 0, on a

   $$DF(0)=(D_ug)(u(0),v(0))\,.\,(Du)(0)+(D_vg)(u(0),v(0))\,.\,(Dv)(0)=4\,.\,(-1)+(-5)\,.\,3=-4-15=-19.$$

3. **Calculer, si elle existe, l'intégrale suivante**

   $$\int_{-1}^{0}\left(\int_{-\infty}^{x}e^{2x+y}dy\right)dx.$$

   Solution. La fonction $f:(x,y)\mapsto e^{2x+y}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}^2$ donc sur $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\in[-1,0],\ y\in\,]-\infty,x]\}$, ensemble non borné parallèle aux 2 axes.
   Si x est fixé dans $[-1,0]$, la fonction $g:y\mapsto e^{2x}.e^y$ est continue sur $]-\infty,x]$.
   Etudions son intégrabilité en $-\infty$ en calculant la limite $L=\lim_{t\to-\infty}\int_t^x e^{2x}.e^y\ dy$. Si cette limite est finie alors g est intégrable sur $]-\infty,x]$ et la valeur de la limite est l'intégrale de g sur $]-\infty,x]$. On a

   $$L=\lim_{t\to-\infty}(e^{2x}[e^y]_t^x)=e^{3x}-e^{2x}\lim_{t\to-\infty}e^t=e^{3x},$$

   limite finie puisque x est fixé dans $[-1,0]$.
   La fonction $h:x\mapsto e^{3x}$ est continue sur le fermé borné $[-1,0]$ donc est intégrable sur cet ensemble.
   Ainsi, f est intégrable sur A et

   $$\int_{-1}^{0}\left(\int_{-\infty}^{x}e^{2x+y}dy\right)dx=\int_{-1}^{0}e^{3x}\ dx=\frac{1}{3}[e^{3x}]_{-1}^{0}=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{e^3}\right).$$

Test 1 du 09-03-2012

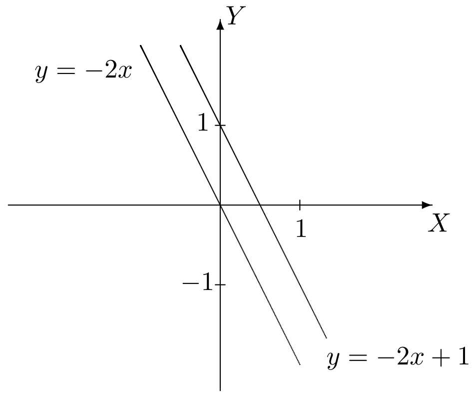
1. **On donne la fonction f par $f(x,y) = \arcsin\left(\sqrt{2x+y}\right)$.**

   (a) **Déterminer les domaines de définition et de dérivabilité de f et les représenter.**
   Solution. Le domaine de définition de f est l'ensemble

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x+y \geq 0,\ -1 \leq \sqrt{2x+y} \leq 1\right\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq 2x+y \leq 1\}.$$

   Le domaine de dérivabilité de f est l'ensemble

$$B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x+y > 0,\ -1 < \sqrt{2x+y} < 1\right\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < 2x+y < 1\}.$$



L'ensemble A est l'ensemble des points situés entre les droites, les points des droites étant compris dans A.

L'ensemble B est l'ensemble des points situés entre les droites, les points des droites n'étant pas compris dans B.

   (b) **Calculer la dérivée partielle de f par rapport à sa première variable.**
   Solution. La dérivée partielle de f par rapport à sa première variable est donnée par

$$D_x f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1-(2x+y)}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2x+y}} \cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{1-2x-y}.\sqrt{2x+y}}.$$

2. **Soit $F(t) = g(u(t), v(t))$ avec $u(-1) = 3$, $v(-1) = -4$, $(Du)(-1) = -2$, $(Dv)(-1) = 1$, $(D_u g)(3,-4) = 4$ et $(D_v g)(3,-4) = 5$. Si F est dérivable en -1, que vaut $DF(-1)$?**

   Solution. Si F est dérivable en -1, on a

$$\begin{aligned} DF(-1) &= (D_u g)(u(-1), v(-1)) \ .\ (Du)(-1) + (D_v g)(u(-1), v(-1)) \ .\ (Dv)(-1) \\ &= 4 \ .\ (-2) + 5 \ .\ 1 = -8 + 5 = -3. \end{aligned}$$

3. **Calculer, si elle existe, l'intégrale suivante**

$$\int_{-\infty}^{0} \left(\int_{2x+1}^{1-x} e^{3x-y} dy \right) dx.$$

   Solution. La fonction $f : (x,y) \mapsto e^{3x-y}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}^2$ donc sur $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in\ ]-\infty, 0],\ y \in\ [2x+1, 1-x]\}$, ensemble non borné parallèle aux 2 axes.
   Si x est fixé dans $]-\infty, 0]$, la fonction $g : y \mapsto e^{3x}.e^{-y}$ est continue sur le fermé borné $[2x+1, 1-x]$ donc intégrable sur cet ensemble. Dès lors,

$$\int_{2x+1}^{1-x} e^{3x} e^{-y} dy = e^{3x}[-e^{-y}]_{2x+1}^{1-x} = e^{3x}(e^{-2x-1} - e^{x-1}) = e^{x-1} - e^{4x-1}.$$

   La fonction $h : x \mapsto e^{x-1} - e^{4x-1}$ est continue sur $]-\infty, 0]$. Etudions son intégrabilité en $-\infty$ en calculant la limite $L = \lim_{t \to -\infty} \int_t^0 (e^{x-1} - e^{4x-1})\ dx$. Si cette limite est finie alors h est intégrable sur $]-\infty, 0]$ et f est intégrable sur A. De plus, la valeur de la limite est l'intégrale de f sur A. On a

$$L = \lim_{t \to -\infty} \left[e^{x-1} - \frac{1}{4} e^{4x-1} \right]_t^0 = e^{-1} - \frac{1}{4} e^{-1} - \lim_{t \to -\infty} \left(e^{t-1} - \frac{1}{4} e^{4t-1} \right) = \frac{3}{4e}.$$

   Ainsi, puisque la limite est finie, f est intégrable sur A et

$$\int_{-\infty}^{0} \left(\int_{2x+1}^{1-x} e^{3x-y} dy \right) dx = \frac{3}{4e}.$$

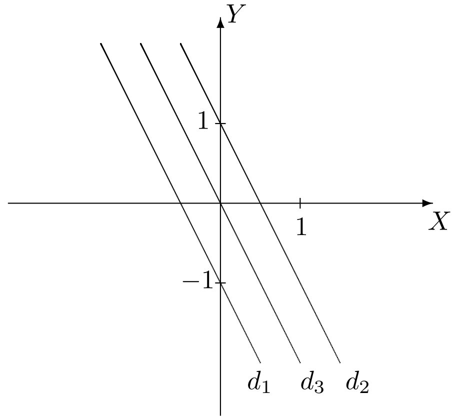
Test 1 du 13-03-2012

1. **On donne la fonction f par $f(x,y) = \operatorname{cotg}(\arcsin(2x+y))$.**
   (a) **Déterminer les domaines de définition et de dérivabilité de f et les représenter.**
   Solution. Le domaine de définition de f est l'ensemble

   $$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le 2x+y \le 1, \arcsin(2x+y) \neq 0\right\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le 2x+y \le 1, 2x+y \neq 0\right\}.$$

   Le domaine de dérivabilité de f est l'ensemble

   $$B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < 2x+y < 1, \arcsin(2x+y) \neq 0\right\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < 2x+y < 1, 2x+y \neq 0\right\}.$$



   L'ensemble A est l'ensemble des points situés entre les droites d_1 et d_2 exceptés ceux de d_3, les points des droites d_1 et d_2 étant compris dans A.

   L'ensemble B est l'ensemble des points situés entre les droites d_1 et d_2 exceptés ceux de d_3, les points des droites d_1 et d_2 n'étant pas compris dans B.

   Les droites d_1, d_2 et d_3 ont respectivement pour équation cartésienne $y = -2x-1$, $y = -2x+1$ et $y = -2x$.

   (b) **Calculer la dérivée partielle de f par rapport à sa première variable.**
   Solution. La dérivée partielle de f par rapport à sa première variable est donnée par

   $$D_x f(x,y) = \frac{-1}{\sin^2(\arcsin(2x+y))} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-(2x+y)^2}} \cdot 2 = \frac{-2}{(2x+y)^2\sqrt{1-(2x+y)^2}}.$$

2. **Soit $F(t) = g(u(t), v(t))$ avec $u(4) = 2$, $v(4) = -1$, $(Du)(4) = -4$, $(Dv)(4) = 3$, $(D_u g)(2,-1) = 1$ et $(D_v g)(2,-1) = -3$. Si F est dérivable en 4, que vaut $DF(4)$?**

   Solution. Si F est dérivable en 4, on a

   $$DF(4) = (D_u g)(u(4), v(4)) \,.\, (Du)(4) + (D_v g)(u(4), v(4)) \,.\, (Dv)(4) = 1 \,.\, (-4) + (-3) \,.\, 3 = -4-9 = -13.$$

3. **Calculer, si elle existe, l'intégrale suivante**

   $$\int_0^{+\infty} \left(\int_y^{y+1} e^{y-3x} dx \right) dy.$$

   Solution. La fonction $f : (x,y) \mapsto e^{y-3x}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}^2$ donc sur $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0,+\infty[,\ x \in\ [y, y+1]\}$, ensemble non borné parallèle aux 2 axes.
   Si y est fixé dans $[0,+\infty[$, la fonction $g : x \mapsto e^y.e^{-3x}$ est continue sur le fermé borné $[y, y+1]$ donc intégrable sur cet ensemble. Dès lors,

   $$\int_y^{y+1} e^y.e^{-3x} dx = e^y \left[-\frac{1}{3} e^{-3x} \right]_y^{y+1} = \frac{1}{3} e^y (e^{-3y} - e^{-3y-3}) = \frac{1}{3}(e^{-2y} - e^{-2y-3}).$$

   La fonction $h : y \mapsto \frac{1}{3}(e^{-2y} - e^{-2y-3})$ est continue sur $[0,+\infty[$. Etudions son intégrabilité en $+\infty$ en calculant la limite $L = \lim_{t \to +\infty} \int_0^t \frac{1}{3}(e^{-2y} - e^{-2y-3})\ dy$. Si cette limite est finie alors h est intégrable sur $[0,+\infty[$ et f est intégrable sur A. De plus, la valeur de la limite est l'intégrale de f sur A. On a

   $$L = -\frac{1}{6} \lim_{t \to +\infty} \left[e^{-2y} - e^{-2y-3} \right]_0^t = -\frac{1}{6} \lim_{t \to +\infty} \left(e^{-2t} - e^{-2t-3} \right) + \frac{1}{6}(1 - e^{-3}) = \frac{1}{6}(1 - e^{-3}).$$

   Ainsi, puisque la limite est finie, f est intégrable sur A et

   $$\int_0^{+\infty} \left(\int_y^{y+1} e^{y-3x} dx \right) dy = \frac{1}{6} \left(1 - \frac{1}{e^3} \right).$$