Université de Liège

1, 2, 3... Sciences

Année académique 2011-2012

Mathématiques générales B : corrigé du test 2

Version 14 mars 2012

Test 2 du 19-03-2012

1. **Calculer, si elle existe, la matrice inverse de** $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

   Solution. En remplaçant la première ligne par cette ligne moins 2 fois la deuxième, on obtient

   $$\det M = \begin{vmatrix} 0 & -3 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (-1)(-6-2) = 8 \neq 0,$$

   si on applique la première loi des mineurs à la première colonne. Puisque le déterminant de M n'est pas nul, la matrice inverse de M existe.

   Si $\mathcal{M}$ est la matrice des cofacteurs des éléments de M, on a

   $$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{et dès lors} \qquad M^{-1} = \frac{1}{\det M}\,\widetilde{\mathcal{M}} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. **La matrice M suivante est-elle diagonalisable ? Pourquoi ? Si elle l'est, en déterminer une forme diagonale, ainsi qu'une matrice inversible qui y conduit.**

   $$\begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 4 & -8 & 4 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

   Solution. Si I est la matrice identité de dimension 3 alors les valeurs propres de M sont les solutions de l'équation caractéristique $\det(M - \lambda I) = 0$. On a

   $$\det(M-\lambda I) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 3 & 0 \\ 4 & -8-\lambda & 4 \\ 0 & 3 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (-3-\lambda)\begin{vmatrix} -8-\lambda & 4 \\ 3 & -3-\lambda \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 3 & -3-\lambda \end{vmatrix}$$

   si on applique la première loi des mineurs à la première colonne. Ainsi,

   $$\det(M-\lambda I) = (-3-\lambda)(24 + 11\lambda + \lambda^2 - 12) - 12(-3-\lambda) = (-3-\lambda)(\lambda^2 + 11\lambda)$$

   et les valeurs propres de M sont -11, -3 et 0. Comme ce sont des valeurs propres simples, la matrice est diagonalisable.

   Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre -11 sont les vecteurs non nuls X tels que

   $$(M + 11\,I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 8 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 8x + 3y = 0 \\ 4x + 3y + 4z = 0 \\ 3y + 8z = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = z \\ y = -\dfrac{8}{3}z \end{array}\right..$$

   Dès lors, les vecteurs propres relatifs à la valeur propre -11 sont les vecteurs $c\begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix}$, $c \in \mathbb{C}_0$.

   Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre -3 sont les vecteurs non nuls X tels que

   $$(M + 3\,I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 4 & -5 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3y = 0 \\ 4x - 5y + 4z = 0 \\ 3y = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -z \\ y = 0 \end{array}\right..$$

   Dès lors, les vecteurs propres relatifs à la valeur propre -3 sont les vecteurs $c\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $c \in \mathbb{C}_0$.

Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre 0 sont les vecteurs non nuls X tels que

$$MX = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 4 & -8 & 4 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -3x + 3y = 0 \\ 4x - 8y + 4z = 0 \\ 3y - 3z = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \quad x = y = z \ .$$

Dès lors, les vecteurs propres relatifs à la valeur propre 0 sont les vecteurs $c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ c \in \mathbb{C}_0$.

Ainsi, par exemple, la matrice inversible

$$S = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 8 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{est telle que} \quad S^{-1}MS = \begin{pmatrix} -11 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Test 2 du 23-03-2012

1. **Calculer, si elle existe, la matrice inverse de** $M=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2\\ -2 & 2 & 1\\ 2 & 1 & -2\end{pmatrix}$.

   Solution. En remplaçant la deuxième ligne par cette ligne augmentée de la troisième puis en remplaçant la troisième ligne par cette ligne diminuée du double de la première, on obtient

   $$\det M=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2\\ 0 & 3 & -1\\ 0 & -3 & -6\end{vmatrix}=1.(-18-3)=-21\neq 0,$$

   si on applique la première loi des mineurs à la première colonne. Puisque le déterminant de M n'est pas nul, la matrice inverse de M existe.

   Si $\mathcal{M}$ est la matrice des cofacteurs des éléments de M, on a

   $$\mathcal{M}=\begin{pmatrix} -5 & -2 & -6\\ 6 & -6 & 3\\ -2 & -5 & 6\end{pmatrix}\qquad \text{et dès lors}\qquad M^{-1}=\frac{1}{\det M}\,\widetilde{\mathcal{M}}=\frac{1}{21}\begin{pmatrix} 5 & -6 & 2\\ 2 & 6 & 5\\ 6 & -3 & -6\end{pmatrix}.$$

2. **La matrice M suivante est-elle diagonalisable ? Pourquoi ? Si elle l'est, en déterminer une forme diagonale, ainsi qu'une matrice inversible qui y conduit.**

   $$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 2\\ 0 & -1 & 2\\ 2 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

   Solution. Si I est la matrice identité de dimension 3 alors les valeurs propres de M sont les solutions de l'équation caractéristique $\det(M-\lambda I)=0$. On a

   $$\det(M-\lambda I)=\begin{vmatrix} 2-\lambda & -3 & 2\\ 0 & -1-\lambda & 2\\ 2 & 0 & 2-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)\begin{vmatrix} -1-\lambda & 2\\ 0 & 2-\lambda\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix} -3 & 2\\ -1-\lambda & 2\end{vmatrix}$$

   si on applique la première loi des mineurs à la première colonne. Ainsi,

   $$\det(M-\lambda I)=(2-\lambda)^2(-1-\lambda)+4(-3+1+\lambda)=(\lambda-2)(-\lambda^2+\lambda+6)=(\lambda-2)(\lambda-3)(-\lambda-2)$$

   et les valeurs propres de M sont $-2,\ 2$ et 3. Comme ce sont des valeurs propres simples, la matrice est diagonalisable.

   Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre -2 sont les vecteurs non nuls X tels que

   $$(M+2\,I)X=0\Leftrightarrow\begin{pmatrix} 4 & -3 & 2\\ 0 & 1 & 2\\ 2 & 0 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} 4x-3y+2z=0\\ y+2z=0\\ x+2z=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} x=-2z\\ y=-2z\end{array}\right..$$

   Dès lors, les vecteurs propres relatifs à la valeur propre -2 sont les vecteurs $c\begin{pmatrix} -2\\ -2\\ 1\end{pmatrix},\ c\in\mathbb{C}_0$.

   Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre 2 sont les vecteurs non nuls X tels que

   $$(M-2\,I)X=0\Leftrightarrow\begin{pmatrix} 0 & -3 & 2\\ 0 & -3 & 2\\ 2 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} -3y+2z=0\\ 2x=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} x=0\\ y=\dfrac{2z}{3}\end{array}\right..$$

   Dès lors, les vecteurs propres relatifs à la valeur propre 2 sont les vecteurs $c\begin{pmatrix} 0\\ 2\\ 3\end{pmatrix},\ c\in\mathbb{C}_0$.

Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre 3 sont les vecteurs non nuls X tels que

$$(M-3\,I)X=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 0 & -4 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -x-3y+2z=0 \\ -4y+2z=0 \\ 2x-z=0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y=x \\ z=2x \end{array} \right. .$$

Dès lors, les vecteurs propres relatifs à la valeur propre 3 sont les vecteurs $c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $c \in \mathbb{C}_0$.

Ainsi, par exemple, la matrice inversible

$$S = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{est telle que} \quad S^{-1}MS = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Test 2 du 29-03-2012

1. **Calculer, si elle existe, la matrice inverse de** $M = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

   Solution. En remplaçant la première colonne par cette colonne à laquelle on ajoute le double de la troisième et la deuxième colonne par cette colonne diminuée de la troisième, on obtient

$$\det M = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 7 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 - 21 = -20 \neq 0,$$

   si on applique la première loi des mineurs à la première ligne. Puisque le déterminant de M n'est pas nul, la matrice inverse de M existe.

   Si $\mathcal{M}$ est la matrice des cofacteurs des éléments de M, on a

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 5 & -5 & -5 \\ -1 & -7 & 5 \\ -3 & -1 & -5 \end{pmatrix} \qquad \text{et dès lors} \qquad M^{-1} = \frac{1}{\det M}\,\widetilde{\mathcal{M}} = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} -5 & 1 & 3 \\ 5 & 7 & 1 \\ 5 & -5 & 5 \end{pmatrix}.$$

2. **La matrice M suivante est-elle diagonalisable ? Pourquoi ? Si elle l'est, en déterminer une forme diagonale, ainsi qu'une matrice inversible qui y conduit.**

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ -4 & -6 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

   Solution. Si I est la matrice identité de dimension 3 alors les valeurs propres de M sont les solutions de l'équation caractéristique $\det(M - \lambda I) = 0$. On a

$$\det(M-\lambda I) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 0 & -2 \\ -4 & -6-\lambda & 0 \\ 3 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda)\begin{vmatrix} -6-\lambda & 0 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -4 & -6-\lambda \\ 3 & 3 \end{vmatrix}$$

   si on applique la première loi des mineurs à la première ligne. Ainsi,

$$\det(M-\lambda I) = (-2-\lambda)(-6-\lambda)(1-\lambda) - 6(-4+6+\lambda) = (\lambda+2)(-\lambda^2-5\lambda) = (\lambda+2)(\lambda+5)(-\lambda)$$

   et les valeurs propres de M sont $-5,\ -2$ et 0. Comme ce sont des valeurs propres simples, la matrice est diagonalisable.

   Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre -5 sont les vecteurs non nuls X tels que

$$(M+5\,I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -4 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3x-2z=0 \\ -4x-y=0 \\ 3x+3y+6z=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=-4x \\ z=\dfrac{3x}{2} \end{array}\right. .$$

   Dès lors, les vecteurs propres relatifs à la valeur propre -5 sont les vecteurs $c\begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix}$, $c \in \mathbb{C}_0$.

   Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre -2 sont les vecteurs non nuls X tels que

$$(M+2\,I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ -4 & -4 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -2z=0 \\ -4x-4y=0 \\ 3x+3y+3z=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-y \\ z=0 \end{array}\right. .$$

   Dès lors, les vecteurs propres relatifs à la valeur propre -2 sont les vecteurs $c\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $c \in \mathbb{C}_0$.

Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre 0 sont les vecteurs non nuls X tels que

$$MX = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ -4 & -6 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -2x - 2z = 0 \\ -4x - 6y = 0 \\ 3x + 3y + z = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = \dfrac{-2x}{3} \\ z = -x \end{array} \right. .$$

Dès lors, les vecteurs propres relatifs à la valeur propre 0 sont les vecteurs $c \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $c \in \mathbb{C}_0$.

Ainsi, par exemple, la matrice inversible

$$S = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -8 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{est telle que} \quad S^{-1}MS = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$