Université de Liège

1, 2, 3... Sciences

Année académique 2011-2012

Mathématiques générales A : corrigé du test 3

Version 11 octobre 2011

Corrigé du test 3 du 03-10-2011

1. **Dans un repère orthonormé, si on considère la conique d'équation $a^2x^2 - b^2y^2 = a^2b^2$, $a, b > 0$, donner les coordonnées de ses foyers, de ses points d'intersection avec les axes, les équations cartésiennes de ses éventuelles asymptotes et la valeur de son excentricité.**
Solution. La conique est une hyperbole. En divisant les deux membres par a^2b^2, l'équation s'écrit
$$\frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1.$$
Les foyers de cette hyperbole sont les points de coordonnées $(-\sqrt{a^2+b^2}, 0)$ et $(\sqrt{a^2+b^2}, 0)$. Ses points d'intersection avec les axes sont les points de coordonnées $(-b, 0)$ et $(b, 0)$. Ses asymptotes sont les droites d'équations cartésiennes
$$y = -\frac{a}{b}x \quad \text{et} \quad y = \frac{a}{b}x$$
et son excentricité est donnée par $e = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}$.
2. **Résoudre l'équation suivante dans $[\pi, 3\pi]$.**
$$\sin(2x) = \cos(x)$$
Solution. On a
$$\begin{aligned}\sin(2x) = \cos(x) \quad &\Leftrightarrow \quad 2\sin(x)\cos(x) - \cos(x) = 0\\ &\Leftrightarrow \quad \cos(x) = 0 \text{ ou } \sin(x) = 1/2\\ &\Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$
Dès lors, les solutions dans $[\pi, 3\pi]$ sont données par
$$\left\{\frac{3\pi}{2}, \frac{13\pi}{6}, \frac{5\pi}{2}, \frac{17\pi}{6}\right\}.$$
3. **Si A, B et C sont des points de coordonnées $(0, 1, 1)$, $(-1, 2, 3)$ et $(-2, 0, 1)$ respectivement, calculer le produit scalaire de $2\overrightarrow{AB}$ et $3\overrightarrow{BC}$ ainsi que le produit vectoriel de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$.**
Solution. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ ont pour composantes $(-1, 1, 2)$ et $(-1, -2, -2)$ respectivement. Dès lors, le produit scalaire de $2\overrightarrow{AB}$ et $3\overrightarrow{BC}$ vaut $(-2).(-3) + 2.(-6) + 4.(-6) = -30$ et le produit vectoriel de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ est le vecteur de composantes $(2, -4, 3)$.

Corrigé du test 3 du 07-10-2011

1. **Dans un repère orthonormé, si on considère la conique d'équation $a^2x^2 + b^2y^2 = a^2b^2$, $a, b > 0$ et $a > b$, donner les coordonnées de ses foyers, de ses points d'intersection avec les axes, les équations cartésiennes de ses éventuelles asymptotes et la valeur de son excentricité.**
Solution. La conique est une ellipse. En divisant les deux membres par a^2b^2, l'équation s'écrit
$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1.$$
Les foyers de cette ellipse sont les points de coordonnées $(0, -\sqrt{a^2-b^2})$ et $(0, \sqrt{a^2-b^2})$. Ses points d'intersection avec les axes sont les points de coordonnées $(0, -a)$, $(0, a)$, $(-b, 0)$ et $(b, 0)$. L'ellipse ne possède pas d'asymptotes et son excentricité est donnée par $e = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$.

2. **Résoudre l'équation suivante dans $[\pi, 3\pi]$.**

$$\cos(2x) = \sin(x)$$

Solution. On a

$$\begin{aligned}
\cos(2x) = \sin(x) \quad &\Leftrightarrow \quad \cos^2(x) - \sin^2(x) = \sin(x)\\
&\Leftrightarrow \quad 2\sin^2(x) + \sin(x) - 1 = 0\\
&\Leftrightarrow \quad \sin(x) = -1 \text{ ou } \sin(x) = 1/2\\
&\Leftrightarrow \quad x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Dès lors, les solutions dans $[\pi, 3\pi]$ sont données par

$$\left\{\frac{3\pi}{2}, \frac{13\pi}{6}, \frac{17\pi}{6}\right\}.$$

3. **Dans un repère orthonormé, si A, B et C sont des points de coordonnées $(1, 0, -1)$, $(1, -3, 2)$ et $(2, 0, 1)$ respectivement, calculer le produit scalaire de $3\overrightarrow{AB}$ et $2\overrightarrow{CB}$ ainsi que le produit vectoriel de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CB}$.**

   Solution. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CB}$ ont pour composantes $(0, -3, 3)$ et $(-1, -3, 1)$ respectivement. Dès lors, le produit scalaire de $3\overrightarrow{AB}$ et $2\overrightarrow{CB}$ vaut $0.(-2) + (-9).(-6) + 9.2 = 72$ et le produit vectoriel de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CB}$ est le vecteur de composantes $(6, -3, -3)$.