1, 2, 3... Sciences

Année académique 2011-2012

Mathématiques générales A : corrigé du test 6

Version 28 octobre 2011

Test 6 du 24-10-2011

1. **Enoncer le théorème de la limite des fonctions composées (ou fonctions de fonctions) dans le cas de la limite en $+\infty$ de $x \mapsto \text{arctg}(-3x)$.**

   Solution. Soient l, l' des réels (ou ∞, $-\infty$, $+\infty$). Si

   $$\lim_{x\to+\infty}(-3x) = l \text{ et si } \lim_{x\to l} \text{arctg } x = l',$$

   alors

   $$\lim_{x\to+\infty} \text{arctg}(-3x) = l'.$$

2. **Décomposer la fraction rationnelle suivante en fractions rationnelles simples à coefficients réels.**

   $$\frac{-x+11}{x^2-4x-5}$$

   Solution. La fraction donnée est propre, son dénominateur se factorise sous la forme $(x-5)(x+1)$ et tous les coefficients sont réels. Il existe donc des réels uniques A et B tels que

   $$\frac{-x+11}{x^2-4x-5} = \frac{A}{x-5} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+B(x-5)}{(x+1)(x-5)},\ x \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 5\}.$$

   Vu les propriétés des polynômes, cette égalité est équivalente à $-x+11 = A(x+1)+B(x-5)$, $x \in \mathbb{R}$. Si $x = -1$, l'égalité précédente s'écrit $12 = -6B \Leftrightarrow B = -2$ et si $x = 5$, on a $6 = 6A \Leftrightarrow A = 1$. Ainsi,

   $$\frac{-x+11}{x^2-4x-5} = \frac{1}{x-5} - \frac{2}{x+1},\ x \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 5\}.$$

3. **Une table ronde a un diamètre de 1,40 m. On peut ajouter 3 rallonges circulaires de 4 dm de largeur chacune. Sachant que chaque convive doit disposer d'au moins 60 cm, combien peut-on en installer autour de la table agrandie ?**

   Solution. Le rayon de la table vaut 1,40 : 2 = 0,7 m = 70 cm et la largeur de chaque rallonge vaut 4 dm = 40 cm. En ajoutant les 3 rallonges, le rayon de la table vaut 70 + 3 . 40 =190 cm et le périmètre de celle-ci est alors de $2.\pi.190 = 380\pi$ cm.
   Puisque $380\pi : 60 \approx 19$, on peut donc installer au maximum 19 convives autour de la table.

Test 6 du 28-10-2011

1. **Enoncer le théorème de la limite des fonctions composées (ou fonctions de fonctions) dans le cas de la limite en $-\infty$ de $x \mapsto \text{arcotg}(-2x)$.**

   Solution. Soient l, l' des réels (ou ∞, $-\infty$, $+\infty$). Si

   $$\lim_{x\to-\infty}(-2x) = l \text{ et si } \lim_{x\to l} \text{arcotg } x = l',$$

   alors

   $$\lim_{x\to-\infty} \text{arcotg}(-2x) = l'.$$

2. **Décomposer la fraction rationnelle suivante en fractions rationnelles simples à coefficients réels.**

   $$\frac{-x-16}{x^2+2x-8}$$

   Solution. La fraction donnée est propre, son dénominateur se factorise sous la forme $(x-2)(x+4)$ et tous les coefficients sont réels. Il existe donc des réels uniques A et B tels que

   $$\frac{-x-16}{x^2+2x-8} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+4} = \frac{A(x+4)+B(x-2)}{(x+4)(x-2)},\ x \in \mathbb{R}\backslash\{-4, 2\}.$$

Vu les propriétés des polynômes, cette égalité est équivalente à $-x-16 = A(x+4)+B(x-2)$, $x \in \mathbb{R}$.
Si $x = -4$, l'égalité précédente s'écrit $-12 = -6B \Leftrightarrow B = 2$ et si $x = 2$, on a $-18 = 6A \Leftrightarrow A = -3$.

Ainsi,

$$\frac{-x-16}{x^2+2x-8} = \frac{-3}{x-2} + \frac{2}{x+4},\ x \in \mathbb{R}\backslash\{-4, 2\}.$$

3. **Une table ronde a un diamètre de 1,60 m. On peut ajouter 3 rallonges circulaires de 3 dm de largeur chacune. Sachant que chaque convive doit disposer d'au moins 60 cm, combien peut-on en installer autour de la table agrandie ?**

   Solution. Le rayon de la table vaut 1,60 : 2 = 0,8 m = 80 cm et la largeur de chaque rallonge vaut 3 dm = 30 cm. En ajoutant les 3 rallonges, le rayon de la table vaut 80 + 3 . 30 =170 cm et le périmètre de celle-ci est alors de $2.\pi.170 = 340\pi$ cm.
   Puisque $340\pi : 60 \approx 17$, on peut donc installer au maximum 17 convives autour de la table.