Université de Liège

1, 2, 3... Sciences

Année académique 2011-2012

Mathématiques générales A : corrigé du test 7

Version 4 novembre 2011

Test 7 du 3-11-2011

1. **En utilisant la définition, déterminer si la fonction $f : x \mapsto \sqrt{2x+1}$ est dérivable en 4.**
Solution. Par définition, la fonction f est dérivable en 4 si la limite
$$\lim_{x\to 4} \frac{f(x)-f(4)}{x-4}$$
existe et est finie.
La fonction $x \mapsto \frac{f(x)-f(4)}{x-4} = \frac{\sqrt{2x+1}-3}{x-4}$ est définie sur $A = \{x \in \mathbb{R} : 2x+1 \geq 0 \text{ et } x-4 \neq 0\} = [-1/2, 4[\cup]4, +\infty[$. Comme tout intervalle ouvert contenant 4 rencontre A, la limite est envisageable et on a
$$\lim_{x\to 4}(\sqrt{2x+1}-3) = 0$$
et
$$\lim_{x\to 4}(x-4) = 0$$
Levons cette indétermination grâce aux binômes conjugués. On a
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{2x+1}-3}{x-4} &= \lim_{x\to 4} \frac{(\sqrt{2x+1}-3)(\sqrt{2x+1}+3)}{(x-4)(\sqrt{2x+1}+3)} \\ &= \lim_{x\to 4} \frac{2x+1-9}{(x-4)(\sqrt{2x+1}+3)} \\ &= \lim_{x\to 4} \frac{2(x-4)}{(x-4)(\sqrt{2x+1}+3)} \\ &= \lim_{x\to 4} \frac{2}{\sqrt{2x+1}+3} \\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$
Dès lors, comme cette limite existe et est finie, la fonction f est dérivable en 4.

2. **Calculer (si possible) la limite suivante, sans appliquer le théorème de l'Hospital.**
$$\lim_{x\to 0^-} \operatorname{arctg}(\ln(-x))$$
Solution. La fonction $f : x \mapsto \operatorname{arctg}(\ln(-x))$ est définie sur $A = \{x \in \mathbb{R} : -x > 0\} =]-\infty, 0[$. Soit $B = A \cap]-\infty, 0[=]-\infty, 0[$. Comme tout intervalle ouvert contenant 0 rencontre B, la limite de f en 0^- peut être envisagée.
On a
$$\lim_{x\to 0^-} (-x) = 0^+,$$
$$\lim_{y\to 0^+} \ln y = -\infty$$
et
$$\lim_{t\to -\infty} \operatorname{arctg}(t) = \left(-\frac{\pi}{2}\right)^+.$$
Dès lors, par application du théorème de la limite des fonctions composées, on a
$$\lim_{x\to 0^-} \operatorname{arctg}(\ln(-x)) = \left(-\frac{\pi}{2}\right)^+.$$

3. **Un seau à moitié rempli d'eau pèse 17,5 kg. Si on le remplit d'eau il pèse 21,3 kg. Combien pèse le seau seul ?**
Solution.
Soit x le poids en kg du seau seul et y le poids en kg de la quantité maximale d'eau que peut contenir le seau. On a
$$\begin{cases} x + y = 21,3 \\ x + \frac{y}{2} = 17,5 \end{cases}$$
On obtient alors $y = 7,6$ et $x = 13,7$. Le seau seul pèse donc 13,7 kg.

Test 7 du 4-11-2011

1. **En utilisant la définition, déterminer si la fonction $f : x \mapsto \sqrt{1-2x}$ est dérivable en -2.**
Solution. Par définition, la fonction f est dérivable en -2 si la limite

$$\lim_{x\to -2} \frac{f(x)-f(-2)}{x+2}$$

existe et est finie.
La fonction $x \mapsto \frac{f(x)-f(-2)}{x+2} = \frac{\sqrt{1-2x}-\sqrt{5}}{x+2}$ est définie sur $A = \{x \in \mathbb{R} : 1-2x \geq 0 \text{ et } x \neq -2\} =]-\infty,-2[\,\cup\,]-2, 1/2]$. Comme tout intervalle ouvert contenant -2 rencontre A, la limite est envisageable et on a

$$\lim_{x\to -2} (\sqrt{1-2x}-\sqrt{5}) = 0$$

et

$$\lim_{x\to -2} (x+2) = 0$$

Levons cette indétermination grâce aux binômes conjugués. On a

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to -2} \frac{\sqrt{1-2x}-\sqrt{5}}{x+2} &= \lim_{x\to -2} \frac{(\sqrt{1-2x}-\sqrt{5})(\sqrt{1-2x}+\sqrt{5})}{(x+2)(\sqrt{1-2x}+\sqrt{5})} \\
&= \lim_{x\to -2} \frac{1-2x-5}{(x+2)(\sqrt{1-2x}+\sqrt{5})} \\
&= \lim_{x\to -2} \frac{-2(x+2)}{(x+2)(\sqrt{1-2x}+\sqrt{5})} \\
&= \lim_{x\to -2} \frac{-2}{\sqrt{1-2x}+\sqrt{5}} \\
&= \frac{-1}{\sqrt{5}}
\end{aligned}$$

Dès lors, comme cette limite existe et est finie, la fonction f est dérivable en -2.

2. **Calculer (si possible) la limite suivante, sans appliquer le théorème de l'Hospital.**

$$\lim_{x\to 1^+} \operatorname{arcotg}(\ln(x-1))$$

Solution. La fonction $f : x \mapsto \operatorname{arcotg}(\ln(x-1))$ est définie sur $A = \{x \in \mathbb{R} : x-1 > 0\} =]1,+\infty[$.
Soit $B = A \cap]1,+\infty[=]1,+\infty[$. Comme tout intervalle ouvert contenant 1 rencontre B, la limite de f en 1^+ peut être envisagée.
On a

$$\lim_{x\to 1^+} (x-1) = 0^+,$$

$$\lim_{y\to 0^+} \ln y = -\infty$$

et

$$\lim_{t\to -\infty} \operatorname{arcotg}(t) = \pi^-.$$

Dès lors, par application du théorème de la limite des fonctions composées, on a

$$\lim_{x\to 0^-} \operatorname{arctg}(\ln(-x)) = \pi^-.$$

3. **Un seau à moitié rempli d'eau pèse 21,6 kg. Si on le remplit d'eau il pèse 32,2 kg. Combien pèse le seau seul ?**
Soit x le poids en kg du seau seul et y le poids en kg de la quantité maximale d'eau que peut contenir le seau. On a

$$\begin{cases} x + y = 32,2 \\ x + \frac{y}{2} = 21,6 \end{cases}$$

On obtient alors $y = 21,2$ et $x = 11$. Le seau seul pèse donc 11 kg.