# *1, 2, 3... Sciences*

***Année académique 2011-2012***

## Mathématiques générales A : corrigé du test 8

Version 10 novembre 2011

## Test 8 du 7-11-2011

1. **Quelles sont les hypothèses à vérifier pour l'application du théorème de l'Hospital ?**

   *Solution.* Avant d'appliquer le théorème de l'Hospital au calcul de la limite $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, il faut vérifier sur $V$, un voisinage ouvert de $x_0$, que

   1) $f$ et $g$ sont des fonctions dérivables sur $V$,
   2) $g$ et $Dg$ diffèrent de 0 en tout point de $V$,
   3) $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ OU $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \infty$,
   4) $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{Df(x)}{Dg(x)} = l$ ($l$ réel ou $\pm\infty$).

2. – **Déterminer le domaine de définition, de continuité et de dérivabilité de la fonction donnée explicitement ci-dessous.**

$$\sqrt{\ln(2x+3)}$$

   *Solution.* La fonction $f : x \mapsto \sqrt{\ln(2x+3)}$ est définie et continue sur

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{R} : 2x+3 > 0 \text{ et } \ln(2x+3) \geq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x > -3/2 \text{ et } 2x+3 \geq 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x > -3/2 \text{ et } x \geq -1\} \\ &= [-1, +\infty[ \end{aligned}$$

   et $f$ est dérivable sur

$$\begin{aligned} B &= \{x \in \mathbb{R} : 2x+3 > 0 \text{ et } \ln(2x+3) > 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x > -3/2 \text{ et } x > -1\} \\ &= ]-1, +\infty[. \end{aligned}$$

   – **En calculer la dérivée première.**

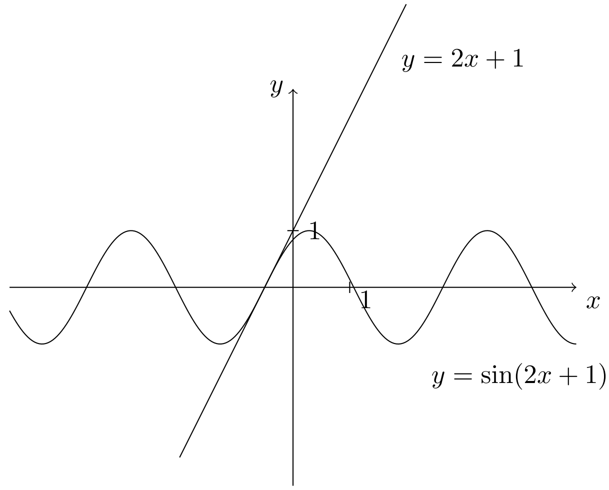
   *Solution.* On a alors

$$\begin{aligned} Df(x) &= D_z\ z^{\frac{1}{2}}\left.\right|_{z=\ln(2x+3)} \cdot D_y\ \ln(y)\left.\right|_{y=2x+3} \cdot D(2x+3) \\ &= \frac{1}{2} z^{-\frac{1}{2}}\left.\right|_{z=\ln(2x+3)} \cdot \frac{1}{y}\left.\right|_{y=2x+3} \cdot 2 \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\ln(2x+3)}} \cdot \frac{1}{2x+3} \cdot 2 \\ &= \frac{1}{(2x+3)\sqrt{\ln(2x+3)}},\ x \in B. \end{aligned}$$

3. **Déterminer l'équation cartésienne de la tangente au graphique de la fonction $x \mapsto \sin(2x+1)$ au point d'abscisse $-1/2$. Dans un repère orthonormé, représenter cette fonction et cette tangente.**

   *Solution.* La fonction donnée, dérivable sur $\mathbb{R}$, a pour dérivée $x \mapsto 2\cos(2x+1)$. L'image de cette dérivée en $-1/2$ est égale à $2\cos\left(2 \cdot (\frac{-1}{2}) + 1\right) = 2\cos(0) = 2$. Dès lors, l'équation cartésienne de la tangente au graphique de la fonction au point d'abscisse $-1/2$ est

$$\begin{aligned} y - \sin\left(2 \cdot \left(\frac{-1}{2}\right) + 1\right) &= 2\left(x + \frac{1}{2}\right) \\ \Leftrightarrow y - \sin(0) &= 2\left(x + \frac{1}{2}\right) \\ \Leftrightarrow y - 0 &= 2\left(x + \frac{1}{2}\right) \\ \Leftrightarrow y &= 2x + 1 \end{aligned}$$




**Test 8 du 8-11-2011**

1. **Quelles sont les hypothèses à vérifier pour l'application du théorème de l'Hospital ?**
   *Solution.* Avant d'appliquer le théorème de l'Hospital au calcul de la limite $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, il faut vérifier sur $V$, un voisinage ouvert de $x_0$, que
   1) $f$ et $g$ sont des fonctions dérivables sur $V$,
   2) $g$ et $Dg$ diffèrent de 0 en tout point de $V$,
   3) $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ OU $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \infty$,
   4) $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \frac{Df(x)}{Dg(x)} = l$ ($l$ réel ou $\pm\infty$).
2. – **Déterminer le domaine de définition, de continuité et de dérivabilité de la fonction donnée explicitement ci-dessous.**

$$\sqrt[3]{\ln(1-3x)}$$

*Solution.* La fonction $f : x \mapsto \sqrt[3]{\ln(1-3x)}$ est définie et continue sur

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{R} : 1-3x > 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x < 1/3\} \\ &= ]-\infty, 1/3[ \end{aligned}$$

et $f$ est dérivable sur

$$\begin{aligned} B &= \{x \in \mathbb{R} : 1-3x > 0 \text{ et } \ln(1-3x) \neq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x < 1/3 \text{ et } 1-3x \neq 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x < 1/3 \text{ et } x \neq 0\} \\ &= ]-\infty, 0[ \cup ]0, 1/3[. \end{aligned}$$

– **En calculer la dérivée première.**
*Solution.* On a alors

$$\begin{aligned} Df(x) &= D_z\ z^{\frac{1}{3}} \big|_{z=\ln(1-3x)} \cdot D_y\ \ln(y) \big|_{y=1-3x} \cdot D(1-3x) \\ &= \frac{1}{3} z^{-\frac{2}{3}} \big|_{z=\ln(1-3x)} \cdot \frac{1}{y} \big|_{y=1-3x} \cdot (-3) \\ &= \frac{1}{3\sqrt[3]{\ln^2(1-3x)}} \cdot \frac{1}{1-3x} \cdot (-3) \\ &= \frac{-1}{(1-3x)\sqrt[3]{\ln^2(1-3x)}},\ x \in B. \end{aligned}$$

3. **Déterminer l'équation cartésienne de la tangente au graphique de la fonction $x \mapsto \operatorname{tg}(3x+1)$ au point d'abscisse $-1/3$. Dans un repère orthonormé, représenter cette fonction et cette tangente.**

*Solution.* La fonction donnée, dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{3}(\frac{\pi}{2} - 1 + k\pi) : k \in \mathbb{Z}\}$, a pour dérivée $x \mapsto \dfrac{3}{\cos^2(3x+1)}$. L'image de cette dérivée en $-1/3$ est égale à $\dfrac{3}{\cos^2\left(3 \cdot (\frac{-1}{3}) + 1\right)} = \dfrac{3}{\cos^2(0)} = 3$. Dès lors, l'équation cartésienne de la tangente au graphique de la fonction au point d'abscisse $-1/3$ est

$$\begin{aligned} y - \operatorname{tg}\left(3 \cdot \left(\frac{-1}{3}\right) + 1\right) &= 3\left(x + \frac{1}{3}\right) \\ \Leftrightarrow y - \operatorname{tg}(0) &= 3\left(x + \frac{1}{3}\right) \\ \Leftrightarrow y - 0 &= 3\left(x + \frac{1}{3}\right) \\ \Leftrightarrow y &= 3x + 1 \end{aligned}$$