Université de Liège

1, 2, 3... Sciences

Année académique 2011-2012

Mathématiques générales A : corrigé du test 9

Version 16 novembre 2011

Test 9 du 14-11-2011

1. **Soit $f : x \mapsto \sin x$.**
   – **Qu'appelle-t-on une primitive de f ?**
   Solution. On appelle primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \mapsto \sin x$ définie sur $\mathbb{R}$ toute fonction F dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $DF(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$.
   – **Où la fonction f est-elle primitivable ?**
   Solution. La fonction f est primitivable sur $\mathbb{R}$ puisqu'elle est continue sur $\mathbb{R}$.
   – **Donner une primitive de f.**
   Solution. Une primitive de f est donnée par $F : x \mapsto -\cos x$, $x \in \mathbb{R}$.
2. **Calculer si possible la limite suivante.**

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1/x)}{2x+1}$$

Solution. La fonction $f : x \mapsto \frac{\ln(1/x)}{2x+1}$ est définie sur

$$A = \{x \in \mathbb{R} : 2x + 1 \neq 0 \text{ et } \frac{1}{x} > 0\} =]0, +\infty[.$$

Cet ensemble n'étant pas majoré, la limite est envisageable et on a
– $\lim\limits_{x\to+\infty} (2x + 1) = +\infty$.
– $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0^+$ et $\lim\limits_{y\to0^+} \ln y = -\infty$ donc, par application du théorème de la limite des fonctions composées, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(1/x) = -\infty$.

Levons cette indétermination grâce au théorème de l'Hospital.
Considérons les fonctions $h : x \mapsto \ln(1/x)$ et $g : x \mapsto 2x+1$ ainsi qu'un intervalle ouvert $V =]\varepsilon, +\infty[$ avec $\varepsilon > 0$ assez grand.
Comme
– h et g sont dérivables sur V,
– $Dg(x) = 2 \neq 0, \forall x \in V$,
– $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{D(\ln(1/x))}{D(2x+1)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-1/x}{2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-1}{2x} = 0$,

par le théorème de l'Hospital, on a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1/x)}{2x+1} = 0.$$

3. **Quand l'eau se transforme en glace, son volume augmente d'un quinzième. Quelle quantité d'eau, exprimée en litres, faut-il pour obtenir 9,6 mètres cube de glace ?**
Solution. Soit x la quantité d'eau recherchée en mètres cube. On a

$$\begin{aligned} x + \frac{1}{15}x &= 9,6 \\ \Leftrightarrow \frac{16}{15}x &= 9,6 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{15}{16} \cdot 9,6 \\ \Leftrightarrow x &= 9. \end{aligned}$$

Comme 1 m^3=1000l, il faudra 9000 l d'eau pour obtenir 9,6 mètres cube de glace.

Test 9 du 16-11-2011

1. **Soit $f : x \mapsto (x-2)^3$.**
   - **Qu'appelle-t-on une primitive de f ?**
     Solution. On appelle primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \mapsto (x-2)^3$ définie sur $\mathbb{R}$ toute fonction F dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $DF(x) = (x-2)^3$, $x \in \mathbb{R}$.
   - **Où la fonction f est-elle primitivable ?**
     Solution. La fonction f est primitivable sur $\mathbb{R}$ puisqu'elle est continue sur $\mathbb{R}$.
   - **Donner une primitive de f.**
     Solution. Une primitive de f est donnée par $F : x \mapsto \frac{(x-2)^4}{4}$, $x \in \mathbb{R}$.
2. **Calculer si possible la limite suivante.**

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\ln(1-x)}{\exp(-x)}$$

Solution. La fonction $f : x \mapsto \frac{\ln(1-x)}{\exp(-x)}$ est définie sur

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \exp(-x) \neq 0 \text{ et } 1-x > 0\} =]-\infty, 1[.$$

Cet ensemble n'étant pas minoré, la limite est envisageable et on a
- $\lim_{x \to -\infty} \exp(-x) = +\infty$.
- $\lim_{x \to -\infty} (1-x) = +\infty$ et $\lim_{y \to +\infty} \ln y = +\infty$ donc, par application du théorème de la limite des fonctions composées, on a $\lim_{x \to -\infty} \ln(1-x) = +\infty$.

Levons cette indétermination grâce au théorème de l'Hospital.
Considérons les fonctions $h : x \mapsto \ln(1-x)$ et $g : x \mapsto \exp(-x)$ ainsi qu'un intervalle ouvert $V =]-\infty, -\varepsilon[$ avec $\varepsilon > 0$ assez grand.
Comme
- h et g sont dérivables sur V,
- $Dg(x) = -\exp(-x) \neq 0, \forall x \in V$,
- $\lim_{x \to -\infty} \frac{D(\ln(1-x))}{D(\exp(-x))} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-1/(1-x)}{-\exp(-x)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\exp(x)}{1-x} = 0$ car $\lim_{x \to -\infty} \exp(x) = 0$ et $\lim_{x \to -\infty} (1-x) = +\infty$,

par le théorème de l'Hospital, on a

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\ln(1-x)}{\exp(-x)} = 0.$$

3. **Quand l'eau se transforme en glace, son volume augmente d'un quinzième. Quelle quantité d'eau, exprimée en litres, faut-il pour obtenir 19.2 mètres cube de glace ?**
   Solution. Soit x la quantité d'eau recherchée en mètres cube. On a

$$\begin{aligned} x + \frac{1}{15}x &= 19,2 \\ \Leftrightarrow \frac{16}{15}x &= 19,2 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{15}{16} \cdot 19,2 \\ \Leftrightarrow x &= 18. \end{aligned}$$

Comme 1 m^3=1000l, il faudra 18000 l d'eau pour obtenir 19,2 mètres cube de glace.

Test 9 du 18-11-2011

1. **Soit $f : x \mapsto \sqrt[5]{x}$.**
   – **Qu'appelle-t-on une primitive de f ?**
   Solution. On appelle primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \mapsto \sqrt[5]{x}$ définie sur $\mathbb{R}$ toute fonction F dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $DF(x) = \sqrt[5]{x}$, $x \in \mathbb{R}$.
   – **Où la fonction f est-elle primitivable ?**
   Solution. La fonction f est primitivable sur $\mathbb{R}$ puisqu'elle est continue sur $\mathbb{R}$.
   – **Donner une primitive de f.**
   Solution. Une primitive de f est donnée par $F : x \mapsto \frac{x\sqrt[5]{x}}{6/5} = \frac{5x\sqrt[5]{x}}{6}$, $x \in \mathbb{R}$.
2. **Calculer si possible la limite suivante.**

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{1-x}}{\ln(-x)}$$

Solution. La fonction $f : x \mapsto \frac{\sqrt{1-x}}{\ln(-x)}$ est définie sur

$$A = \{x \in \mathbb{R} : 1-x \geq 0,\ \ln(-x) \neq 0 \text{ et } -x > 0\} =]-\infty, -1[\cup]-1, 0[.$$

Cet ensemble n'étant pas minoré, la limite est envisageable et on a
– $\lim_{x\to-\infty} \ln(-x) = +\infty$.
– $\lim_{x\to-\infty}(1-x) = +\infty$ et $\lim_{y\to+\infty}\sqrt{y} = +\infty$ donc, par application du théorème de la limite des fonctions composées, on a $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{1-x} = +\infty$.
Levons cette indétermination grâce au théorème de l'Hospital.
Considérons les fonctions $h : x \mapsto \sqrt{1-x}$ et $g : x \mapsto \ln(-x)$ ainsi qu'un intervalle ouvert $V =]-\infty, -\varepsilon[$ avec $\varepsilon > 0$ assez grand.
Comme
– h et g sont dérivables sur V,
– $Dg(x) = 1/x \neq 0, \forall x \in V$,
– $\lim_{x\to-\infty} \frac{D(\sqrt{1-x})}{D(\ln(-x))} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-1/(2\sqrt{1-x})}{1/x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x}{2\sqrt{1-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x}{2\sqrt{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{-x}}{2} = +\infty$
par le théorème de l'Hospital, on a

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{1-x}}{\ln(-x)} = +\infty.$$

3. **Quand l'eau se transforme en glace, son volume augmente d'un quinzième. Quelle quantité d'eau, exprimée en litres, faut-il pour obtenir 3,2 mètres cube de glace ?**
Solution. Soit x la quantité d'eau recherchée en mètres cube. On a

$$\begin{aligned} x + \frac{1}{15}x &= 3,2 \\ \Leftrightarrow \frac{16}{15}x &= 3,2 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{15}{16}\cdot 3,2 \\ \Leftrightarrow x &= 3. \end{aligned}$$

Comme 1 m^3=1000l, il faudra 3000 l d'eau pour obtenir 3,2 mètres cube de glace.