1, 2, 3...Sciences

Année académique 2011-2012

PROBLÈMES ÉLÉMENTAIRES POUR S'ENTRAÎNER

Version 30 août 2011 (V1 23/08/11)

Enoncés des problèmes élémentaires des années précédentes

1. Un missile est lancé sous un angle de 45 degrés et vole en ligne droite à une vitesse constante de 75 m/s. Combien de temps mettra-t-il pour atteindre une altitude de 4.5 km ?
2. Le lait contient environ les 3/20 de son poids de crème et la crème 25 % de son poids de beurre. Combien de kg de beurre obtient-on à partir de 2000 l de lait si la densité du lait est $1,032$?
3. Dans le premier quadrant d'un repère orthonormé d'origine O, on place un triangle OAB, rectangle en A, de telle sorte que B soit sur l'axe des abscisses. Si la distance de A à l'origine vaut 1 et si la distance entre A et B vaut 2, quelles sont les coordonnées cartésiennes de A ?
4. Lors de la construction de l'élément central d'une abbaye (jardin en plein air et promenade pour les jours de pluie), afin de conserver les surfaces, les architectes procédaient de manière bien précise, selon la procédure suivante.

   Supposons que le jardin soit carré. On trace alors le cercle dont le centre est le centre du carré et qui passe par les quatre sommets de ce carré. On construit ensuite un second carré, de même centre, de côtés parallèles à ceux du premier et tangents au cercle que l'on vient de tracer. La « promenade » couverte est la partie située à l'intérieur du second carré en dehors du jardin. Son aire est la même que celle du jardin. Pourquoi ?
5. Sur une carte à l'échelle $\dfrac{1}{2\ 500}$ la distance (en ligne droite) entre deux points est égale à 4cm. A quelle distance réelle en kilomètres cela correspond-il ?
6. A la météo, on annonce une nuit de pluie et le lendemain, on mesure effectivement sur la terrasse une hauteur de 1mm d'eau par mètre carré. A combien de litres par mètre carré cela correspond-il ?
7. Un laborantin doit préparer une solution de 18 ml qui contient 3% de glucose. Il a deux types de solution à sa disposition, l'une contenant 10% de glucose et l'autre seulement 1%. Combien de ml de chaque type de solution doit-il prendre pour obtenir ce qu'il désire ?
8. Dans un repère orthonormé, on donne l'ellipse $\mathcal{E}$ par son équation cartésienne

   $$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$$

   Représenter cette ellipse, ainsi que ses foyers. Spécifier précisément (égalité et graphique) la ou les relations entre les dénominateurs intervenant dans le membre de gauche de l'équation et les coordonnées des foyers.
9. Dans un repère orthonormé, on donne une ellipse par son équation cartésienne

   $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

   où a, b sont des nombres réels tels que $0 < b < a$. On définit le point F (foyer) de coordonnées$(c, 0)$, où $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.
   a) Exprimer le carré de la distance entre un point P et F lorsque P parcourt l'ellipse.
   b) Déterminer la valeur maximale et la valeur minimale de cette distance en fonction de a et c.
   c) On appelle « aphélie » le point de l'ellipse qui correspond à la distance maximale, notée r_a et « périhélie » le point qui correspond à la distance minimale, notée r_p. Exprimer l'excentricité de l'ellipse en fonction des deux distances r_a et r_p.
   d) Rechercher les valeurs numériques approximatives de r_a, r_p dans le cas de l'orbite terrestre (en vous documentant dans des documents de référence). En déduire une valeur approximative de e.
10. On se rapporte à un repère orthonormé d'origine notée O, le sol étant symbolisé par l'axe X et la verticale par Y. Dans ce repère, le mouvement d'un projectile lancé de l'origine avec une vitesse initiale de composantes (v_1, v_2) est donnée en fonction du temps par

    $$\begin{cases} x(t) = v_1 t \\ y(t) = v_2 t - \frac{g}{2} t^2 \end{cases}$$

    où g désigne l'accélération due à la gravité terrestre.
    a) Montrer que la trajectoire du projectile est une parabole.
    b) Si la norme de la vitesse initiale vaut 20 m/s et si l'angle de tir vaut $60°$, quelle est la hauteur

maximale atteinte par le projectile[1] ? Pourquoi ?
c) Quelle est l'expression de la distance horizontale parcourue[2] par le projectile lorsqu'il retombe sur le sol ? Pourquoi ?
d) Représenter graphiquement les divers éléments de ce problème.
e) Quel angle de tir doit-on prendre pour que la distance dont il est question au point c) soit maximale (en prenant une norme de la vitesse fixe) ?

11. Vous faites du shopping et vous avez un coup de coeur pour une pièce de collection. Celle-ci est cependant un peu chère pour vos économies. Vous savez par ailleurs qu'une augmentation des prix va survenir la semaine qui suit et que cette augmentation sera de l'ordre de 30 %. Mais ensuite, ce sera la periode des soldes et vous savez que les prix vont alors chuter de 30 %. Vous êtes de toute façon décidé à acquérir la pièce ; pour débourser le moins possible, vous achetez avant l'augmentation de prix ou vous attendez les soldes ? Pourquoi ?
12. a) Dans une question de physique relative au mouvement des corps, on lit que *Le corps A se déplace le long d'une courbe décrite par*
$$\{(2\cos\theta, \sin\theta) : \theta \in [0, 2\pi]\}$$
Dans un repère orthonormé, représenter cette courbe et donner une interprétation graphique de θ.
b) On se place dans un repère orthonormé du plan. Représenter l'ensemble des points dont la tangente de l'angle polaire est toujours égale à 1 et donner une équation cartésienne de cet ensemble.
13. Deux petits bateaux téléguidés partent du même point sur un lac. Leur vitesse est respectivement égale à 3 et 4 mètres par minute. Si l'un se dirige vers le nord et l'autre vers l'est, combien de temps faut-il attendre pour que la distance entre les deux soit supérieure à 10 mètres ?
14. En combien de temps dix ouvriers construiront-ils un certain mur que quinze ouvriers ont pu élever en douze jours ?
15. Une équipe de 18 ouvriers travaillant à raison de 8 heures par jour ont pavé en 10 jours une rue de cent cinquante mètres. Combien faut-il d'ouvriers travaillant 6 heures par jour pour paver en 15 jours une rue longue de 75 m, rue de même largeur que la précédente ?
16. Françoise a trois fois l'âge que Nicolas avait quand elle avait l'âge actuel de Nicolas. Quand Nicolas aura l'âge de Françoise, ils auront ensemble 112 ans. Quels sont les âges actuels de Nicolas et de Françoise ?
17. Si on compte les arbres d'un jardin par groupes de 8, il en reste 5 et si on les compte par groupes de 7, il en reste 2. Sachant que le nombre de groupes de 7 surpasse de 3 celui des groupes de 8, combien d'arbres y a-t-il dans ce jardin ?
18. Quand l'eau se transforme en glace, son volume augmente d'un quinzième. Quelle quantité d'eau, exprimée en litres, faut-il pour obtenir 1.28 mètres cube de glace ?
19. Lors d'une interrogation, un étudiant doit répondre à 100 questions d'un QCM. Pour toute réponse correcte, il obtient 1 point et pour toute réponse incorrecte, on lui retire 0,25 point. Sachant qu'il obtient 53,75 comme cote finale et qu'il est obligé de répondre à toutes les questions, quel est le nombre de réponses correctes fournies ?
20. Au mois d'août 2009, à l'occasion des championnats du monde d'athlétisme à Berlin, le jamaïcain Usain Bolt établissait un nouveau record du monde du 100m en parcourant la distance en 9.58 secondes. A quelle vitesse moyenne exprimée en kilomètres par heure cela correspond-il ?
21. A submarine dives at an angle of 30° with the horizontal and follows a straigtht-line path for a total distance of 50 m. How far is the submarine below the surface of the water ?
22. En imprimerie, une des classifications standards des formats de papier s'appelle le *système ISO A*. Les feuilles A4 bien connues font partie de ce système, de même que les A3, A5, etc On passe du type A4 au type A5 en divisant le plus grand des côtés du rectangle en 2 ; on procède ainsi successivement pour passer d'un type à l'autre.

    Vous préparez un envoi postal standard dont le poids ne doit pas excéder 100g. Le papier employé est de la catégorie commerciale " $80g/m^2$" ce qui signifie qu'un mètre carré de papier pèse 80g. Sachant qu'une feuille A0 a une aire de 1m^2 et que l'enveloppe utilisée pèse 20g, combien de pages A4 pouvez-vous glisser dans l'enveloppe ?

1. (On suppose $g = 10\ m/s^2$.)
2. la portée

23. Le nombre d'or est le réel défini comme suit. Il s'agit du rapport entre deux longueurs (la plus grande au numérateur) telles que le rapport de la somme de celles-ci sur la plus grande soit égal à celui de la plus grande sur la plus petite. Que vaut ce nombre d'or ?

    Se poser des questions : ... le nombre d'or est célèbre depuis fort longtemps ; il n'est pas appelé ainsi sans raison. Il apparaît dans la nature ... Où par exemple ? Et comment le construire géométriquement ? ...

24. Un mélange contient 45 litres d'eau salée et 30 litres d'eau pure. On désire en faire un mélange qui, sur deux litres, contienne 1/2 litre d'eau salée. Combien de litres d'eau pure doit-on ajouter ?

25. Une rivière coule au pied d'une falaise du haut de laquelle on laisse tomber une pierre. On entend l'impact 6 secondes après l'avoir lâchée. La distance d en m parcourue par la pierre jusqu'à la rivière en t secondes est donnée par $d = \frac{1}{2}gt^2$ où $g = 10$ m/s^2 et la vitesse du son est de 330 m/s. En mètres, que vaut approximativement la hauteur de la falaise ?

26. Si a et b sont deux nombres réels, comment s'exprime la tangente de leur différence en fonction de la tangente de chacun d'eux ? Utiliser votre réponse pour déterminer la valeur exacte de la tangente de $\frac{\pi}{12}$.

27. Un touriste observe un monument depuis le sol. Il évalue une première fois l'angle d'élévation du monument et trouve $60°$. Il recule de 100 m et son évaluation donne alors $45°$. Quelle est approximativement la hauteur du monument ? (Note : le touriste est supposé très petit par rapport au monument ; dans le calcul, on peut donc négliger sa taille.)

28. Sur un plan à l'échelle 1/200, les dimensions d'un jardin rectangulaire sont 4,5 cm et 3 cm. Quelle aire en ares manque-t-il dans la réalité pour avoir un jardin dont la superficie vaut 1 are ?

29. Une population de bactéries est attaquée par un agent extérieur faisant en sorte qu'à chaque instant, le taux de changement de la population soit proportionnel à celle-ci. Si on suppose que la constante de proportionnalité est égale à -0.028,
    - écrire une équation reliant la population et le taux de changement de celle-ci à chaque instant
    - que vaut le taux de changement après une minute si la population à ce moment est de 3 millions d'individus ?

30. Rédiger une démonstration de la propriété suivante, suggérée au cours : *Soit un naturel strictement positif m. La fonction polynomiale $x \mapsto x^m$ est dérivable en tout réel x et sa dérivée a la forme explicite $mx^{m-1},\ x \in \mathbb{R}$.*

    Suggestion, donnée au cours : utiliser le binôme de Newton

Solution des problèmes élémentaires

1. **Un missile est lancé sous un angle de 45 degrés et vole en ligne droite à une vitesse constante de 75 m/s. Combien de temps mettra-t-il pour atteindre une altitude de** 4.5 **km ?**

   Solution. On travaille dans un triangle rectangle dont un côté de l'angle droit a pour longueur 4.5 km = 4 500 m et dont l'angle opposé à ce côté mesure 45 degrés. Dès lors, l'hypoténuse mesure $\frac{4\ 500}{\sin 45°} = 4\ 500\ \sqrt{2}$ m.

   Ainsi, le temps mis pour atteindre cette altitude vaut $\dfrac{4\ 500\ \sqrt{2}}{75} = 60\ \sqrt{2}$ secondes, donc approximativement 85 sec.

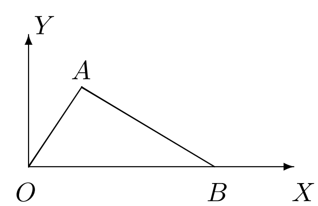
2. **Le lait contient environ les 3/20 de son poids de crème et la crème 25 % de son poids de beurre. Combien de kg de beurre obtient-on à partir de 2 000 l de lait si la densité du lait est 1,032 ?**

   Solution. Vu la densité du lait, on sait que 2 000 litres de lait pèsent $2000\ .\ 1,032 = 2064$ kg. Le poids de crème obtenu est alors de $2064\ .\ \frac{3}{20}$ kg et le poids de beurre de $2064\ .\ \frac{3}{20} \cdot \frac{25}{100} = 2064\ .\ \frac{3}{80} = \frac{258\ .\ 3}{10} = 77,4$ kg.

   Ainsi, à partir de 2 000 l de lait on obtient 77,4 kg de beurre.

3. **Dans le premier quadrant d'un repère orthonormé d'origine O, on place un triangle OAB, rectangle en A, de telle sorte que B soit sur l'axe des abscisses. Si la distance de A à l'origine vaut 1 et si la distance entre A et B vaut 2, quelles sont les coordonnées cartésiennes de A ?**

   Solution.



   Si θ est la mesure de l'angle $\widehat{BOA}$, les coordonnées polaires de A sont $(1, \theta)$; les coordonnées cartésiennes de ce point sont alors $(\cos\theta, \sin\theta)$.

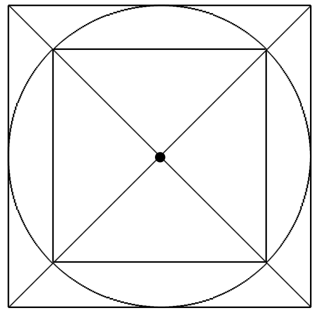
   Dans le triangle OAB rectangle en A, on a tg $\theta = \frac{|AB|}{|OA|} = 2$. Comme tg $^2\theta + 1 = \frac{1}{\cos^2\theta}$, on a $\cos^2\theta = \frac{1}{5}$ et $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = \frac{4}{5}$.

   Dès lors, comme on travaille dans le premier quadrant, $\cos\theta$ et $\sin\theta$ sont des réels positifs et les coordonnées cartésiennes de A sont $\left(\dfrac{\sqrt{5}}{5}, \dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)$.

4. **Lors de la construction de l'élément central d'une abbaye (jardin en plein air et promenade pour les jours de pluie), afin de conserver les surfaces, les architectes procédaient de manière bien précise, selon la procédure suivante.**

   Supposons que le jardin soit carré. On trace alors le cercle dont le centre est le centre du carré et qui passe par les quatre sommets de ce carré. On construit ensuite un second carré, de même centre, de côtés parallèles à ceux du premier et tangents au cercle que l'on vient de tracer. La « promenade » couverte est la partie située à l'intérieur du second carré en dehors du jardin. Son aire est la même que celle du jardin. Pourquoi ?

Solution.



Si c est la longueur d'un côté du carré inscrit (jardin) alors l'aire du jardin vaut c^2.
Un diamètre du cercle a même longueur qu'une diagonale du carré inscrit mais aussi qu'un côté du carré circonscrit.
Par application du théorème de Phythagore dans un des triangles rectangles formés par une diagonale et deux côtés consécutifs du carré inscrit, on a $D^2 = 2c^2$ si D est la longueur d'un diamètre du cercle.
Dès lors, l'aire du carré circonscrit vaut $D^2 = 2c^2$ et l'aire de la promenade, différence entre l'aire du carré circonscrit et celle du carré inscrit vaut $2c^2 - c^2 = c^2$.
Ainsi, l'aire du jardin est égale à l'aire de la promenade.

5. **Sur une carte à l'échelle $\frac{1}{2\ 500}$ la distance (en ligne droite) entre deux points est égale à 4cm. A quelle distance réelle en kilomètres cela correspond-il ?**

   Solution. Vu l'échelle, 1 cm sur la carte correspond à 2 500 cm = 0,025 km dans la réalité. Dès lors, 4 cm correspondent à $4 \times 0,025 =$ 0,1 km.
   La distance réelle entre deux points distants de 4 cm sur une carte à l'échelle $\frac{1}{2\ 500}$ est donc de 0,1 km.

6. **A la météo, on annonce une nuit de pluie et le lendemain, on mesure effectivement sur la terrasse une hauteur de 1mm d'eau par mètre carré. A combien de litres par mètre carré cela correspond-il ?**

   Solution. Comme 1 mm = 10^{-3} m, le volume d'eau sur la terrasse est égal à $10^{-3} \times 1 = 10^{-3}$ m^3= 1 dm^3 = 1 litre.
   Ainsi, 1 mm d'eau par m^2 correspond à 1 l par m^2.

7. **Un laborantin doit préparer une solution de 18 ml qui contient 3% de glucose. Il a deux types de solution à sa disposition, l'une contenant 10% de glucose et l'autre seulement 1%. Combien de ml de chaque type de solution doit-il prendre pour obtenir ce qu'il désire ?**

   Solution. Soit x le nombre de ml de la solution contenant 10% de glucose. Le nombre de ml de la solution contenant 1% de glucose est donc $(18 - x)$. Cela étant, on a

   $$\frac{10}{100} \cdot x + \frac{1}{100} \cdot (18 - x) = \frac{3}{100} \cdot 18$$

   ce qui est équivalent à $10x + 18 - x = 54 \Leftrightarrow 9x = 36 \Leftrightarrow x = 4$.

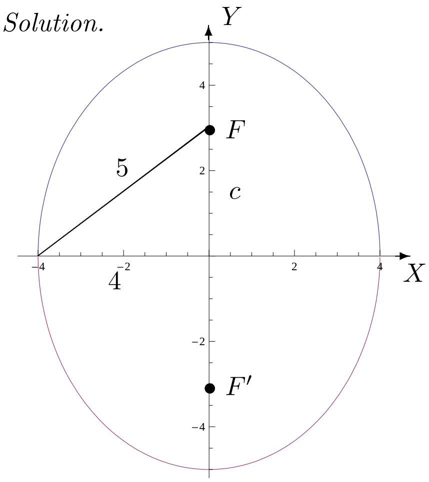
   Ainsi, le laborantin doit prendre 4 ml de la solution contenant 10% de glucose et 14 ml de la solution à 1% pour obtenir 18 ml de solution à 3%.

8. **Dans un repère orthonormé, on donne l'ellipse $\mathcal{E}$ par son équation cartésienne**

   $$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$$

Représenter cette ellipse, ainsi que ses foyers. Spécifier précisément (égalité et graphique) la ou les relations entre les dénominateurs intervenant dans le membre de gauche de l'équation et les coordonnées des foyers.

Solution.



Si les foyers ont pour coordonnées cartésiennes $(0, c)$ et $(0, -c)$ alors on a

$$c^2 + 16 = 25 \Leftrightarrow c = 3$$

car c positif.

9. **Dans un repère orthonormé, on donne une ellipse par son équation cartésienne**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

où a, b sont des nombres réels tels que $0 < b < a$. On définit le point F (foyer) de coordonnées$(c, 0)$, où $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.
a) Exprimer le carré de la distance entre un point P et F lorsque P parcourt l'ellipse.

Solution. Soit P un point de l'ellipse de coordonnées cartésiennes (x, y). L'ordonnée de ce point est telle que $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$. Le carré de la distance de P à F vaut

$$\text{dist}^2(P, F) = (x - c)^2 + y^2 = (x - c)^2 + \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) = (x - c)^2 + \frac{a^2 - c^2}{a^2}(a^2 - x^2)$$

puisque $b^2 = a^2 - c^2$ ou encore

$$\text{dist}^2(P, F) = \frac{a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^4 - a^2x^2 - a^2c^2 + c^2x^2}{a^2} = \left(\frac{cx - a^2}{a}\right)^2$$

b) Déterminer la valeur maximale et la valeur minimale de cette distance en fonction de a et c.

Solution. La distance entre P et F est donc donnée par $\dfrac{|cx - a^2|}{a}$ et comme $x \in [-a, a]$ et $c < a$, la valeur maximale est obtenue pour $x = -a$ et la valeur minimale pour $x = a$.
Ainsi, la valeur maximale est $a + c$ et la valeur minimale $a - c$.

c) On appelle « aphélie » le point de l'ellipse qui correspond à la distance maximale, notée r_a et « périhélie » le point qui correspond à la distance minimale, notée r_p. Exprimer l'excentricité de l'ellipse en fonction des deux distances r_a et r_p.

Solution. En résolvant le système $\begin{cases} r_a = a + c \\ r_p = a - c \end{cases}$, on a $\begin{cases} a = \frac{r_a + r_p}{2} \\ c = \frac{r_a - r_p}{2} \end{cases}$.

Dès lors, l'excentricité vaut

$$e = \frac{c}{a} = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p}.$$

d) Rechercher les valeurs numériques approximatives de r_a, r_p dans le cas de l'orbite terrestre (en vous documentant dans des documents de référence). En déduire une

valeur approximative de e.

Solution. Comme $r_a = 152\ 097\ 701$ km et $r_p = 147\ 098\ 074$ km, on a $e = 0,01671022$.

10. **On se rapporte à un repère orthonormé d'origine notée O, le sol étant symbolisé par l'axe X et la verticale par Y. Dans ce repère, le mouvement d'un projectile lancé de l'origine avec une vitesse initiale de composantes (v_1, v_2) est donnée en fonction du temps par**

$$\begin{cases} x(t) = v_1 t \\ y(t) = v_2 t - \frac{g}{2} t^2 \end{cases}$$

où g désigne l'accélération due à la gravité terrestre.
a) **Montrer que la trajectoire du projectile est une parabole.**

Solution. En éliminant t entre les deux équations, si $v_1 \neq 0$, on obtient

$$y = \frac{v_2}{v_1} x - \frac{g}{2v_1^2} x^2 \ (1)$$

qui est bien l'équation d'une parabole.

b) **Si la norme de la vitesse initiale vaut $20\ m/s$ et si l'angle de tir vaut 60°, quelle est la hauteur maximale atteinte par le projectile [3] ? Pourquoi ?**

Solution. Les composantes de la vitesse initiale sont $(v_1, v_2) = (20 \cos 60°, 20 \sin 60°) = (10, 10\sqrt{3})$. Si $g = 10\ m/s^2$, on a $y(t) = 10\sqrt{3}t - 5t^2$, fonction du second degré ayant un maximum pour $t = \sqrt{3}$. La hauteur maximale atteinte par le projectile vaut alors $y(\sqrt{3}) = 30 - 15 = 15\ m$.

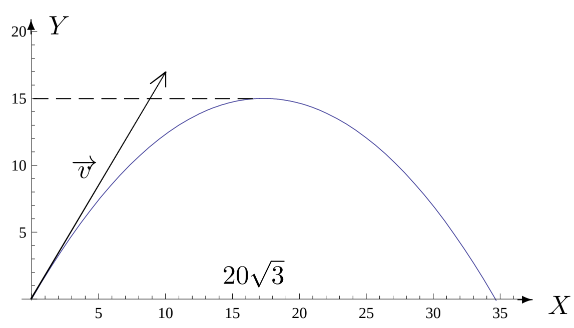
c) **Quelle est l'expression de la distance horizontale parcourue [4] par le projectile lorsqu'il retombe sur le sol ? Pourquoi ?**

Solution. Les zéros de la fonction $t \mapsto y(t) = 10\sqrt{3}t - 5t^2$ sont 0 et $2\sqrt{3}$. Ainsi, lorsque le projectile retombe sur le sol, la distance horizontale parcourue vaut

$$x(2\sqrt{3}) = 10\ .\ 2\sqrt{3} = 20\sqrt{3}\ m.$$

d) **Représenter graphiquement les divers éléments de ce problème.**

Solution. En remplaçant v_1, v_2 et g par leur valeur dans (1), on a $y = \sqrt{3}x - \frac{1}{20}x^2$, équation d'une parabole dont voici la représentation graphique dans un repère orthonormé.



e) **Quel angle de tir doit-on prendre pour que la distance dont il est question au point c) soit maximale (en prenant une norme de la vitesse fixe) ?**

3. (On suppose $g = 10\ m/s^2$.)
4. la portée

Solution. Les zéros de $y(t) = v_2 t - \frac{g}{2}t^2$ sont 0 et $\frac{2v_2}{g}$. Ainsi, lorsque le projectile retombe sur le sol, la distance horizontale parcourue vaut

$$x\left(\frac{2v_2}{g}\right) = \frac{2v_1v_2}{g} = \frac{2v^2\cos(\theta)\sin(\theta)}{g} = \frac{v^2\sin(2\theta)}{g}$$

si θ est l'angle de tir et v la norme de la vitesse . Cette distance est maximale si et seulement si $\sin(2\theta) = 1 \Leftrightarrow \theta = 45°$ puisque $\theta \in [0°, 90°]$.

11. **Vous faites du shopping et vous avez un coup de coeur pour une pièce de collection. Celle-ci est cependant un peu chère pour vos économies. Vous savez par ailleurs qu'une augmentation des prix va survenir la semaine qui suit et que cette augmentation sera de l'ordre de 30 %. Mais ensuite, ce sera la periode des soldes et vous savez que les prix vont alors chuter de 30 %. Vous êtes de toute façon décidé à acquérir la pièce ; pour débourser le moins possible, vous achetez avant l'augmentation de prix ou vous attendez les soldes ? Pourquoi ?**

Solution. Soit P le prix actuel de la pièce convoitée. Après l'augmentation, son prix sera de $P + \frac{30}{100}P$ et lors des soldes, il sera de $P + \frac{30}{100}P - \frac{30}{100}(P + \frac{30}{100}P) = P - \frac{9}{100}P = \frac{91}{100}P$.

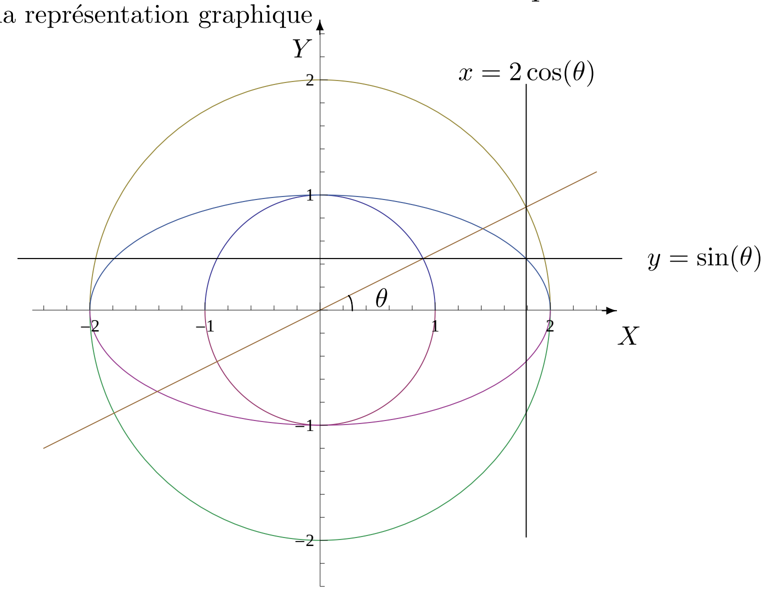
Pour débourser le moins possible, il faut donc attendre les soldes puisqu'on ne paiera alors que 91 % du prix actuel.

12. **a) Dans une question de physique relative au mouvement des corps, on lit que *Le corps* A *se déplace le long d'une courbe décrite par***

$$\{(2\cos\theta, \sin\theta) : \theta \in [0, 2\pi]\}$$

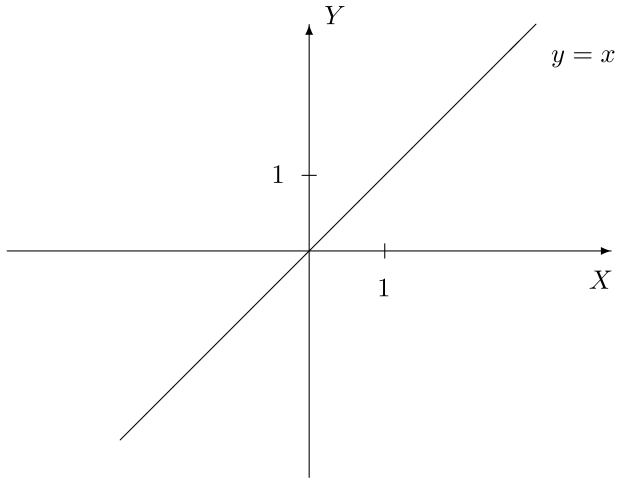
Dans un repère orthonormé, représenter cette courbe et donner une interprétation graphique de θ.

Solution. L'équation cartésienne de cette courbe est $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$: c'est l'équation d'une ellipse dont voici la représentation graphique



b) On se place dans un repère orthonormé du plan. Représenter l'ensemble des points dont la tangente de l'angle polaire est toujours égale à 1 et donner une équation cartésienne de cet ensemble.

Solution. Comme $\left\{ \begin{array}{l} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{array} \right.$, si $x \neq 0$, on a tg $(\theta) = \dfrac{y}{x} = 1$ et l'ensemble des points demandé est la droite d'équation cartésienne $y = x$.



13. **Deux petits bateaux téléguidés partent du même point sur un lac. Leur vitesse est respectivement égale à 3 et 4 mètres par minute. Si l'un se dirige vers le nord et l'autre vers l'est, combien de temps faut-il attendre pour que la distance entre les deux soit supérieure à 10 mètres ?**

    Solution. Supposons que les deux bateaux partent de l'origine d'un repère orthonormé. Après t minutes, l'un se trouvera au point de coordonnées $(0, 3t)$ et l'autre au point de coordonnées $(4t, 0)$. La distance en mètres entre ces deux points est donnée par $\sqrt{16t^2 + 9t^2} = 5t$ et elle sera supérieure à 10 mètres si $t > 2$.
    Ainsi, après 2 minutes la distance entre les deux bateaux est supérieure à 10 mètres.

14. **En combien de temps dix ouvriers construiront-ils un certain mur que quinze ouvriers ont pu élever en douze jours ?**

    Solution. Si 15 ouvriers construisent le mur en 12 jours alors 5 ouvriers le construisent en 3 fois plus de jours donc en 12 . 3 jours et 10 ouvriers le construisent en 2 fois moins de jours donc en $\frac{12\ .\ 3}{2} = 18$ jours.
    Ce mur est donc construit en 18 jours par 10 ouvriers.

15. **Une équipe de 18 ouvriers travaillant à raison de 8 heures par jour ont pavé en 10 jours une rue de cent cinquante mètres. Combien faut-il d'ouvriers travaillant 6 heures par jour pour paver en 15 jours une rue longue de 75 m, rue de même largeur que la précédente ?**

    Solution. Le nombre d'heures de travail de la première équipe pour paver 150 m est égal à 18 . 8 . 10 heures. Pour paver 1 m, il leur faut donc $\frac{18\ .\ 8\ .\ 10}{150}$ heures.
    Si x est le nombre d'ouvriers de la seconde équipe alors, le nombre d'heures pour paver 1 m vaut $\frac{x\ .\ 6\ .\ 15}{75}$ heures.
    En égalant ces nombres d'heures, on a

    $$\frac{18\ .\ 8\ .\ 10}{150} = \frac{x\ .\ 6\ .\ 15}{75} \Leftrightarrow \frac{18\ .\ 8\ .\ 2}{2} = x\ .\ 6\ .\ 3 \Leftrightarrow x = 8.$$

    Ainsi, il faut 8 ouvriers pour paver en 15 jours une rue de 75 m de long à raison de 6 heures par jour.

16. **Françoise a trois fois l'âge que Nicolas avait quand elle avait l'âge actuel de Nicolas. Quand Nicolas aura l'âge de Françoise, ils auront ensemble 112 ans. Quels sont les âges**

actuels de Nicolas et de Françoise ?

Solution. Soit x l'âge actuel de Nicolas et $x+y$ celui de Françoise, les âges étant donnés en années. Quand Françoise avait x années, Nicolas en avait $x-y$ et quand Nicolas aura $x+y$ années, Françoise en aura $x+2y$. Dès lors, on a le système d'équations

$$\left\{\begin{array}{l} x+y=3(x-y) \\ x+y+x+2y=112 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x=4y \\ 7y=112 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=32 \\ y=16 \end{array}\right. .$$

Ainsi, Nicolas a 32 ans et Françoise en a 32+16=48 ans.

17. **Si on compte les arbres d'un jardin par groupes de 8, il en reste 5 et si on les compte par groupes de 7, il en reste 2. Sachant que le nombre de groupes de 7 surpasse de 3 celui des groupes de 8, combien d'arbres y a-t-il dans ce jardin ?**

Solution. Soit x le nombre de groupes de 8 arbres et $x+3$ celui de groupes de 7 arbres du jardin. Le nombre d'arbres du jardin vaut donc

$$8x+5=7(x+3)+2 \Leftrightarrow x=21+2-5 \Leftrightarrow x=18.$$

Ainsi, le nombre d'arbres du jardin est égal à $18\ .\ 8+5=149$ arbres.

18. **Quand l'eau se transforme en glace, son volume augmente d'un quinzième. Quelle quantité d'eau, exprimée en litres, faut-il pour obtenir 1.28 mètres cube de glace ?**

Solution. Quand l'eau se transforme en glace, le volume de la glace vaut $\dfrac{16}{15}$ du volume de l'eau et donc le volume de l'eau vaut $\dfrac{15}{16}$ de celui de la glace. Comme 1.28 m^3 correspondent à 1280 litres, le nombre de litres d'eau à transformer en glace vaut $1280\ .\ \frac{15}{16}=1200$ litres.
Ainsi, pour obtenir 1.28 mètres cube de glace, on a besoin de 1200 litres d'eau.

19. **Lors d'une interrogation, un étudiant doit répondre à 100 questions d'un QCM. Pour toute réponse correcte, il obtient 1 point et pour toute réponse incorrecte, on lui retire 0,25oint. Sachant qu'il obtient 53,75 comme cote finale et qu'il est obligé de répondre à toutes les questions, quel est le nombre de réponses correctes fournies ?**
p *Solution.* Soit x le nombre de réponses correctes fournies ; On a

$$x-\frac{1}{4}(100-x)=53,75$$

ce qui est équivalent à

$$\frac{5}{4}x=53,75+25=78,75 \Leftrightarrow x=\frac{78,75\ .\ 4}{5}=63.$$

On a donc que le nombre de réponses correctes est 63.

20. **Au mois d'août 2009, à l'occasion des championnats du monde d'athlétisme à Berlin, le jamaïcain Usain Bolt établissait un nouveau record du monde du 100m en parcourant la distance en 9.58 secondes. A quelle vitesse moyenne exprimée en kilomètres par heure cela correspond-il ?**

Solution. Comme 100 m $=10^{-1}$ km et 9.58s$=\dfrac{9.58}{3600}$h, la vitesse moyenne de Usain Bolt vaut

$$\frac{10^{-1}}{\frac{9.58}{3600}}=\frac{360}{9.58}=37.578 \text{ km/h}.$$

Ainsi, Usain Bolt a couru le 100m à une vitesse moyenne de 37.578 km/h.

21. **A submarine dives at an angle of 30° with the horizontal and follows a straight-line path for a total distance of 50 m. How far is the submarine below the surface of the**

water ?

Solution. Dans le triangle rectangle formé par l'horizontale, la trajectoire suivie par le sous-marin et la projection orthogonale de la position du sous-marin sur l'horizontale, la profondeur à laquelle se trouve le sous-marin est donnée par $50\sin(30°) = 50 \times \frac{1}{2} = 25$ m.
Ainsi le sous-marin se trouve à 25 m sous la surface de l'eau.

22. **En imprimerie, une des classifications standards des formats de papier s'appelle le *système ISO A*. Les feuilles A4 bien connues font partie de ce système, de même que les A3, A5, etc On passe du type A4 au type A5 en divisant le plus grand des côtés du rectangle en 2 ; on procède ainsi successivement pour passer d'un type à l'autre.**
Vous préparez un envoi postal standard dont le poids ne doit pas excéder 100g. Le papier employé est de la catégorie commerciale " $80g/m^2$" ce qui signifie qu'un mètre carré de papier pèse 80g. Sachant qu'une feuille A0 a une aire de 1m^2 et que l'enveloppe utilisée pèse 20g, combien de pages A4 pouvez-vous glisser dans l'enveloppe ?

Solution. L'aire d'une feuille Ai+1 vaut la moitié de l'aire d'une feuille Ai puisqu'on divise la longueur d'un des côtés par 2. Comme l'aire d'une feuille A0 vaut 1 m^2, l'aire d'une feuille A4 vaut $1.\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$ m^2.
Sachant que 1 m^2 de papier pèse 80 g, une feuille A4 pèse donc $80.\frac{1}{16} = 5$ g.
Comme l'enveloppe pèse 20 g, le nombre de feuilles A4 dans l'enveloppe est (100-20) : 5 = 16 feuilles.
Ainsi, on pourra mettre 16 feuilles A4 dans l'enveloppe.

23. **Le nombre d'or est le réel défini comme suit. Il s'agit du rapport entre deux longueurs (la plus grande au numérateur) telles que le rapport de la somme de celles-ci sur la plus grande soit égal à celui de la plus grande sur la plus petite. Que vaut ce nombre d'or ?**

Solution. Soit $\varphi = \frac{L}{l}$ le nombre d'or avec $L > l > 0$.

Comme $\frac{L+l}{L} = \frac{L}{l}$, on a successivement

$$1 + \frac{l}{L} = \frac{L}{l} \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{\varphi} = \varphi \Leftrightarrow \varphi + 1 = \varphi^2 \Leftrightarrow \varphi^2 - \varphi - 1 = 0.$$

On résout cette équation en sachant que $\varphi > 0$. Comme $\Delta = 1 + 4 = 5$, on a $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Ainsi, le nombre d'or vaut

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

24. **Un mélange contient 45 litres d'eau salée et 30 litres d'eau pure. On désire en faire un mélange qui, sur deux litres, contienne 1/2 litre d'eau salée. Combien de litres d'eau pure doit-on ajouter ?**

Solution. Dans le mélange à réaliser, l'eau salée représente le quart de la quantité totale puisqu'on a 1/2 litre d'eau salée sur deux litres. Comme on a 45 litres d'eau salée, le nombre de litres du mélange à réaliser vaut 4.45 = 180 litres. La quantité d'eau pure à ajouter au mélange initial vaut 180 - (45+30) = 105 litres.
Ainsi, on ajoutera 105 litres d'eau pure pour obtenir le mélange souhaité.

25. **Une rivière coule au pied d'une falaise du haut de laquelle on laisse tomber une pierre. On entend l'impact 6 secondes après l'avoir lâchée. La distance d en m parcourue par la pierre jusqu'à la rivière en t secondes est donnée par $d = \frac{1}{2}gt^2$ où $g = 10$ m/s^2 et la vitesse du son est de 330 m/s. En mètres, que vaut approximativement la hauteur de la falaise ?**

Solution. Si la pierre met t secondes pour atteindre la rivière, le son met $6 - t$ secondes pour parcourir la même distance en sens inverse puisqu'on entend l'impact après 6 secondes. La hauteur

H de la falaise vaut $\frac{1}{2}gt^2 = 5t^2$ mais aussi $330(6-t)$ selon qu'on considère la pierre ou le son. Ainsi, on a

$$5t^2 = 330(6-t) \Leftrightarrow t^2 = 66(6-t) \Leftrightarrow t^2 + 66t - 396 = 0.$$

Comme $t > 0$ et $\Delta = 66^2 + 4.396 = 36.165$, on a

$$t = \frac{-66 + 6\sqrt{165}}{2} = -33 + 3\sqrt{165} \text{ et } H = 330(6 + 33 - 3\sqrt{165}) = 153,22\ldots$$

La hauteur de la falaise vaut donc approximativement $153,22$ m.

26. **Si a et b sont deux nombres réels, comment s'exprime la tangente de leur différence en fonction de la tangente de chacun d'eux ? Utiliser votre réponse pour déterminer la valeur exacte de la tangente de $\frac{\pi}{12}$.**

Solution. Soient a, b et $a-b$ des réels différents de $\dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. On a

$$\text{tg }(a-b) = \frac{\sin(a-b)}{\cos(a-b)} = \frac{\sin a \cos b - \sin b \cos a}{\cos a \cos b + \sin a \sin b}$$

et en divisant numérateur et dénominateur par $\cos a \cos b$, on obtient

$$\text{tg }(a-b) = \frac{\text{tg } a - \text{tg } b}{1 + \text{tg } a \text{ tg } b}.$$

Dès lors, comme $\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}$, que tg $(\frac{\pi}{3}) = \sqrt{3}$ et que tg $(\frac{\pi}{4}) = 1$, on a

$$\text{tg }\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\text{tg }(\frac{\pi}{3}) - \text{tg }(\frac{\pi}{4})}{1 + \text{tg }(\frac{\pi}{3})\text{tg }(\frac{\pi}{4})} = \frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}}$$

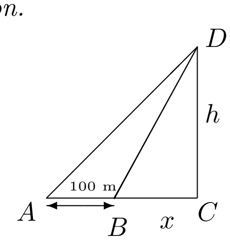
et en multipliant numérateur et dénominateur par $\sqrt{3}-1$, on obtient finalement

$$\text{tg }\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{3-1} = \frac{4-2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3}.$$

Ainsi, $\quad \text{tg }\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = 2 - \sqrt{3}.$

27. **Un touriste observe un monument depuis le sol. Il évalue une première fois l'angle d'élévation du monument et trouve $60°$. Il recule de 100 m et son évaluation donne alors $45°$. Quelle est approximativement la hauteur du monument ? (Note : le touriste est supposé très petit par rapport au monument ; dans le calcul, on peut donc négliger sa taille.)**

Solution.



Considérons les triangles ACD et BCD rectangles en C. Si h est la hauteur du monument et x la distance entre B et C, vu les formules dans les triangles rectangles, on a

$$h = (100 + x) \text{ tg }(45°) = x \text{ tg }(60°).$$

Comme tg $(45°) = 1$ et tg $(60°) = \sqrt{3}$, on a

$$100 + x = \sqrt{3}\,x \Leftrightarrow (\sqrt{3}-1)x = 100 \Leftrightarrow 2x = 100(\sqrt{3}+1) \Leftrightarrow x = 50(\sqrt{3}+1).$$

Dès lors, $h = 100 + x = 100 + 50(\sqrt{3}+1) \approx 236,6$.

Ainsi, la hauteur du monument est de 236,6 mètres.

28. **Sur un plan à l'échelle 1/200, les dimensions d'un jardin rectangulaire sont 4,5 cm et 3 cm. Quelle aire en ares manque-t-il dans la réalité pour avoir un jardin dont la superficie vaut 1 are ?**

Solution. Vu l'échelle, les dimensions réelles s'obtiennent en multipliant par 200 les dimensions sur la carte. Les dimensions réelles sont donc $4,5\ .\ 200 = 900$ cm $= 0,9$ dam et $3\ .\ 200 = 600$ cm $= 0,6$ dam.
Comme 1 dam$^2 = 1$ a, l'aire du jardin vaut $0,9\ .\ 0,6 = 0,54$ a et pour avoir un jardin dont l'aire vaut 1 a, il manque $1 - 0,54 = 0,46$ a.
Il manque donc $0,46$ a pour avoir un jardin dont la superficie vaut 1 are.

29. **Une population de bactéries est attaquée par un agent extérieur faisant en sorte qu'à chaque instant, le taux de changement de la population soit proportionnel à celle-ci. Si on suppose que la constante de proportionnalité est égale à -0.028,**
- écrire une équation reliant la population et le taux de changement de celle-ci à chaque instant
- que vaut le taux de changement après une minute si la population à ce moment est de 3 millions d'individus ?

Solution. A chaque instant t, la population P et le taux de changement de celle-ci DP sont reliés par l'équation $DP(t) = -0,028\ P(t)$.
Le taux de changement après une minute vaut $DP(1) = -0,028\ .\ 3\ 10^6 = -84\ 10^3$ si la population à ce moment est de 3 millions d'individus.
Après une minute, le taux de changement de la population est de $-84\ 10^3$ si la population à ce moment est de 3 millions d'individus.

30. **Rédiger une démonstration de la propriété suivante, suggérée au cours : *Soit un naturel strictement positif m. La fonction polynomiale $x \mapsto x^m$ est dérivable en tout réel x et sa dérivée a la forme explicite $mx^{m-1},\ x \in \mathbb{R}$.***

Solution. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{N}_0$. En appliquant la définition de la dérivabilité, montrons que la limite
$$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^m - x^m}{h}$$
existe, est finie et vaut mx^{m-1}.

Vu la formule du binôme de Newton, on a
$$(x+h)^m - x^m = \sum_{j=0}^{m} C_m^j h^j x^{m-j} - x^m = \sum_{j=1}^{m} C_m^j h^j x^{m-j} + C_m^0 x^m - x^m = \sum_{j=1}^{m} C_m^j h^{j-1}\ h\ x^{m-j}.$$

Dès lors,
$$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^m - x^m}{h} = \lim_{h\to 0} \left(\sum_{j=1}^{m} C_m^j h^{j-1} x^{m-j} \right) = C_m^1 x^{m-1} = mx^{m-1}.$$

Ainsi, la fonction $x \mapsto x^m$ est dérivable en tout réel x et sa dérivée a la forme explicite $mx^{m-1},\ x \in \mathbb{R}$.