

---

Université  
de Liège



# *1, 2, 3...Sciences*

*Année académique 2011-2012*

---

EXERCICES DE MATHÉMATIQUES  
EXERCICES RÉCAPITULATIFS

---

### Exercices divers

- Résoudre les équations et inéquations suivantes (pour (c) et (d), on suppose que  $x \in [\pi, 3\pi]$ )
  - $2x(x+1) = |x+1|$
  - $\frac{|1-x|}{x^2-1} \geq x-1$
  - $\sin(3x) - \cos(x) = 0$
  - $\cos(2x) \leq \cos(x)$
- Simplifier au maximum les expressions suivantes :
  - $\sin(\ln(e^{-\pi/3})) + \cos(\operatorname{tg}(-\pi/4))$
  - $\arcsin(1 - \cos(5\pi/3)) + \arccos(\cos(7\pi/6))$
- Dans un repère orthonormé, on donne les points  $A, B, C$  dont les coordonnées sont  $A(1, 0, 2)$ ,  $B(-1, 2, 1)$  et  $C(3, 1, 1)$ . Calculer
  - $2\vec{AB} \cdot \vec{BC}$
  - $\vec{AC} \wedge \vec{BC}$
- Si elles existent, déterminer les limites suivantes
  - $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(x-1)}{x-2}$
  - $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|1-x|}{\sqrt{1+x^2}}$
  - $\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{x^3+1}{2x}\right)$
  - $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\exp(2x) - 1}{x}$
  - $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(2x+5) - \ln(2x)$
- Où la fonction  $x \mapsto \arcsin(\sqrt{1-x^2})$  est-elle définie ? dérivable ? En déterminer la dérivée première.
- Si elles existent, déterminer la valeur des intégrales suivantes et simplifier la réponse au maximum.
  - $\int_1^2 \frac{\ln(3x)}{x} dx$
  - $\int_{-\infty}^0 x e^{2x} dx$
  - $\int_{-1}^{+\infty} \frac{1}{1+x} dx$
  - $\int_{-2}^2 \sqrt{x^2} dx$
  - $\int_3^4 \frac{2}{x(x^2-4x+4)} dx$
- Résoudre les équations suivantes dans  $\mathbb{C}$ .
  - $x^2 + 2 = ix$
  - $8 + x^3 = 0$
- Représenter dans un repère orthonormé l'ensemble dont une description analytique est la suivante
$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \geq y^2 \geq 1 - 4x^2\}.$$
- Les courbes de croissance de population du modèle de Gompertz sont les représentations de fonctions exponentielles du type

$$f(t) = e^{be^{ct}}, \quad t \in \mathbb{R}$$

où  $b, c$  sont des paramètres réels strictement négatifs.

- (a) Déterminer la dérivée seconde de  $f$ .
- (b) Quelle(s) valeur(s) doit-on donner à  $b$  pour que la dérivée seconde de  $f$  s'annule en  $t = 0$  ?
- (c) Pour  $b = c = -2$ , déterminer la limite des valeurs de  $f$  aux extrémités de son domaine de définition.

### Problèmes élémentaires

1. La distance de freinage (en mètres) d'une voiture roulant à  $v$  km/h sur sol sec est donnée par
  - (a)  $\left(\frac{v}{10}\right)^2 + \frac{v}{2}$  si cette voiture est équipée de freins normaux
  - (b)  $v$  si cette voiture est équipée de freins ABS spéciaux.
 Déterminer les vitesses pour lesquelles la voiture équipée de freins ABS est plus performante quant à la distance de freinage.
2. Lors d'une interrogation, un étudiant doit répondre à 100 questions d'un QCM. Pour toute réponse correcte, il obtient 1 point et pour toute réponse incorrecte, on lui retire 0,25 point. Sachant qu'il obtient 53,75 points comme cote finale et qu'il est obligé de répondre à toutes les questions, quel est le nombre de réponses correctes fournies ?

### QCM

1. Le carré d'un nombre complexe est toujours
  - (a) un nombre positif
  - (b) un nombre négatif
  - (c) un nombre imaginaire pur
  - (d) aucune réponse correcte
2. La partie réelle du produit de deux nombres complexes est toujours égale
  - (a) au produit des parties réelles de ces nombres
  - (b) à la somme des parties réelles de ces nombres
  - (c) à la somme de la partie réelle de l'un et de la partie imaginaire de l'autre
  - (d) au produit de la partie réelle de l'un et de la partie imaginaire de l'autre
  - (e) aucune réponse correcte
3. La valeur absolue de la somme de deux réels est toujours
  - (a) inférieure ou égale à la différence entre les valeurs absolues de ces réels
  - (b) inférieure ou égale à la somme des valeurs absolues de ces réels
  - (c) supérieure ou égale à la somme des valeurs absolues de ces réels
  - (d) supérieure ou égale à la moitié du produit de ces réels
  - (e) aucune réponse correcte
4. Si  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$ , le graphique de  $F(x) = f(-x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$  est
  - (a) le symétrique du graphique de  $f$  par rapport à la première bissectrice
  - (b) le symétrique du graphique de  $f$  par rapport à l'axe  $X$
  - (c) le symétrique du graphique de  $f$  par rapport à l'axe  $Y$
  - (d) le symétrique du graphique de  $f$  par rapport à l'origine
  - (e) aucune réponse correcte
5. L'ensemble des solutions de l'inéquation  $|x|^3 < |x|^2$  est l'ensemble
  - (a)  $[-1, 1[$
  - (b)  $\{x \in \mathbb{R} : |x| < 1\}$
  - (c)  $] -1, 1[ \setminus \{0\}$
  - (d)  $] -\infty, -1[$
  - (e) aucune réponse correcte
6. Dans le plan muni d'un repère, une droite a toujours une équation cartésienne du type  $y = mx + p$ 
  - (a) vrai
  - (b) faux

7. Le cube d'un réel non nul et de son opposé sont toujours égaux
- (a) vrai
  - (b) faux
8. Etant donné deux vecteurs non nuls, tout autre vecteur du plan peut se décomposer de manière unique comme combinaison linéaire de ceux-ci.
- (a) vrai
  - (b) faux
9. Le produit de deux fonctions croissantes est une fonction croissante
- (a) vrai
  - (b) faux
10. Le domaine de la fonction donnée par  $\cos(\cos x)$  est l'intervalle  $[-1,1]$
- (a) vrai
  - (b) faux