Introduction

Généralités

Ce fascicule fournit aux étudiants les listes d'exercices à résoudre lors des répétitions du premier quadrimestre de l'année académique 2011-2012. Il présente aussi la résolution complète d'exercices de base (listes 2002/2003) et les solutions des exercices des listes 2003/2004 et 2004/2005 couvrant la matière du cours de MATHEMATIQUES GENERALES s'adressant aux futurs bacheliers de première année en biologie, chimie, géographie, géologie, physique, informatique et philosophie (option sciences).

Ce fascicule a été rédigé pour répondre à divers objectifs. Il veut fournir aux étudiants une référence correcte sur laquelle s'appuyer pour tenter de résoudre les exercices proposés au cours des répétitions.

La rédaction de ce fascicule a également pour but d'insister sur le vocabulaire spécifique, les symboles mathématiques à utiliser, la rigueur exigée dans la rédaction, les liens indispensables qui doivent figurer entre les différentes étapes d'un développement mathématique. Trop souvent, en corrigeant des interrogations par exemple, on peut lire une succession de notations, d'équations, de calculs écrits les uns à côté des autres sans la moindre indication relative à la logique du raisonnement. C'est cet écueil aussi qu'on voudrait éviter aux étudiants grâce à ce fascicule.

Une dernière intention, et non la moindre, est d'amener, au plus vite, les étudiants à prendre en charge leur formation de la façon la plus active et la plus autonome possible.

Pour terminer, je m'en voudrais de ne pas exprimer mes plus vifs remerciements à Françoise Bastin pour l'accueil qu'elle a réservé à cette initiative, les conseils qu'elle m'a donnés, sa relecture attentive et la confiance qu'elle me témoigne dans mon travail avec les étudiants.

Jacqueline Crasborn
Année académique 2011 - 2012

Informations relatives aux répétitions

Compétences à entraîner

Lors des répétitions, avec l'aide des assistants, il est attendu que les étudiants s'entraînent aux compétences suivantes :

1) **la communication (orale et écrite)**
   – structurée (contexte, justifications, conclusion . . .),
   – précise (vocabulaire et symboles adéquats, reflet exact de la pensée . . .) ;
2) **le sens critique** (l'exercice a-t-il un sens ? le résultat est-il plausible ? . . .) ;
3) **le raisonnement logique et la compréhension** (et non l'application d'une technique de calcul sans réflexion, par imitation . . .) ;

4) **l'autonomie**
   - dans la recherche de pistes ou d'idées par l'utilisation, dans un premier temps, de documents (syllabus du cours ...) et, éventuellement dans un second temps, par une demande d'aide auprès de personnes-ressources pour répondre aux questions ou difficultés rencontrées,
   - dans l'organisation et la planification de son travail ;
5) **la maîtrise des connaissances de base des mathématiques comme outil pour les sciences.**

Consignes pour préparer une répétition

1. Répondre soigneusement aux questions de théorie de la première partie de chaque liste.
2. Il est vivement conseillé
   - de prendre connaissance des exercices à résoudre lors de la répétition future afin de détecter les difficultés qui pourraient être rencontrées lors de la résolution,
   - de dresser alors une liste de questions sur les difficultés rencontrées, questions à poser à l'assistant lors de la répétition

Déroulement des répétitions

1. Chaque séance commence par un test d'une durée de 15 minutes comportant 2 ou 3 questions dont une portant sur la théorie à préparer. Selon les cas, il y a aussi un exercice sur la matière d'une ou des 2 répétitions précédentes ou un problème élémentaire à résoudre en rédigeant clairement la solution.
   Pour ces tests, l'étudiant doit travailler seul, sans calculatrice ni GSM, mais peut se servir de ses documents **PERSONNELS** (notes de cours ou de répétition, préparation de la répétition, syllabus du cours, fascicules "Exercices de base" et "Journal de bord")
2. Ensuite, dans le cas de notions habituellement non vues dans l'enseignement secondaire ou qui semblent souvent poser problème aux étudiants, l'assistant résout 1 ou 2 exercices "modèle" pour se familiariser avec les exercices ayant trait à ces matières.
3. Enfin, chaque étudiant résout, seul ou avec son voisin, les exercices proposés dans la liste en cherchant les informations nécessaires dans ses documents. S'il reste bloqué malgré tout, il appelle alors l'assistant qui l'aidera dans sa recherche.

Tous les exercices de la liste doivent être résolus au plus tard pour la répétition suivante ; il est donc possible que certains soient obligés d'achever à domicile. Dans ce cas, s'ils rencontrent certaines difficultés, ils peuvent toujours en parler lors d'une séance de remédiation ou envoyer un courriel à l'un des assistants.

Les solutions des exercices proposés pour les répétitions ainsi que celles des tests seront mises sur le web semaine après semaine.
Pour permettre à ceux qui le désirent de s'entraîner à la résolution de problèmes élémentaires, une liste de problèmes de ce type est mise sur le web et les étudiants désireux qu'on corrige leur copie n'ont qu'à la rendre à un assistant.

Table des matières des répétitions : 1^{er} quadrimestre 2011-2012

1. Equations, inéquations et puissances.
2. Droites, trigonométrie et calcul vectoriel.
3. Coniques et représentation d'ensembles.
4. Nombres complexes.
5. Eléments de base relatifs aux fonctions.
6. Décomposition en fractions simples et limites.

7. Limites, continuité et dérivation.
8. Application du théorème de l'Hospital.
9. Primitivation.
10. Calcul intégral sur un ensemble borné fermé.
11. Calcul intégral sur un ensemble non borné fermé.
12. Equations différentielles (1$^{\text{ère}}$ partie).
13. Equations différentielles (2$^{\text{ème}}$ partie).

Il est possible que ce planning soit légèrement modifié en fonction de l'avancement du cours théorique. Toute modification sera mentionnée sur la page web du cours dont l'adresse suit

http ://www.afo.ulg.ac.be/fb/ens.html

Il est donc indispensable de la consulter régulièrement.

L'équipe des assistants
Année académique 2011 - 2012

Répétition 1 : équations, inéquations et puissances

A préparer AVANT de venir à la répétition

(Lors de la répétition, vous serez interrogé sur ces points de théorie.)

I. Définitions et résolution d'équations

1. a) Définir une équation du premier degré à **une** inconnue en indiquant de façon précise ce que représente chaque lettre utilisée.
   b) Comment résout-on une équation de ce type ? Exprimer avec précision les opérations utilisées (addition, soustraction, multiplication, division)
   c) Une équation du premier degré à une inconnue peut-elle parfois avoir plus d'une (ou moins d'une) solution ? Si oui, à quelle(s) condition(s) ?
2. Définir une équation du premier degré à **deux** inconnues.
   Dans un repère cartésien du plan, comment se représente graphiquement une telle équation ? Répondre de façon précise en envisageant tous les cas possibles.
3. a) Définir une équation du second degré à une inconnue en indiquant de façon précise ce que représente chaque lettre utilisée. .
   b) Comment résout-on une équation de ce type ?
4. Donner les formules des produits remarquables (carré et cube)
5. Quels sont les processus possibles pour résoudre une équation de degré strictement supérieur à 2 ?
   Si vous manquez d'imagination, voir le fascicule "bases pour les mathématiques" à l'adresse http ://www.facsc.ulg.ac.be/
6. a) Définir une équation fractionnaire.
   b) Quel est le processus de résolution d'une telle équation ?

II. Valeur absolue et équations

1. Définir en français et en symboles mathématiques la valeur absolue d'un réel.
2. Si deux réels ont la même valeur absolue, que peut-on dire de ces réels ? Exprimer la réponse à cette question en français (par une phrase complète) et en symboles mathématiques.
3. Si on prend la valeur absolue d'un réel, quel type de réel obtient-on ? Rédiger une phrase complète.
4. a) Si x est un réel et n un naturel non nul, que peut-on dire du signe de x^{2n} ? de x^{2n+1} ?
   b) En tenant compte de ces renseignements, que vaut $|x^{2n}|$? $|x^{2n+1}|$?

III. Résolution d'inéquations

1. Quelle différence fondamentale existe-t-il entre la résolution d'une équation du premier degré à une inconnue et celle d'une inéquation du même type ?
2. Comment résout-on une inéquation à une inconnue d'un degré autre que le premier ? Décrire de façon précise les différentes étapes de la résolution.
3. Que sait-on du signe
   a) d'un binôme du premier degré ?
   b) d'un trinôme du second degré ?
4. Quelle différence fondamentale existe-t-il entre la résolution d'une équation fractionnaire et celle d'une inéquation fractionnaire ?
5. Si la valeur absolue d'un réel est
   a) supérieure à un réel strictement positif donné, que peut-on dire de l'un par rapport à l'autre ?
   b) même question en remplaçant "supérieure" par "inférieure".

IV. Racines de réels et puissances

a) Pour quels réels une racine d'indice pair est-elle définie ? Quel est le signe de sa valeur ?
b) Mêmes questions dans le cas d'une racine d'indice impair.

V. Sommes et symboles sommatoires

a) Ecrire explicitement la somme des N premières puissances naturelles d'un réel (N est un naturel non nul) puis l'écrire avec des symboles sommatoires.
b) Que vaut cette somme ?

Préambule

Bien des problèmes en sciences donnent lieu à des équations ou inéquations qu'on doit pouvoir résoudre.

- Ainsi, par exemple, un mouvement rectiligne uniforme donne lieu à une équation du premier degré décrivant la position du mobile en fonction du temps. Graphiquement, le mouvement se représente donc par une droite. Dans le cas d'un mouvement rectiligne uniformément accéléré, on est en présence d'une équation du second degré pour décrire la position du mobile en fonction du temps et la représentation graphique est une parabole.
- Si l'on souhaite rechercher le point de rencontre de deux mobiles, on détermine les coordonnées du point d'intersection des graphiques représentant leurs positions en fonction du temps ; analytiquement, on résout un système de deux équations.
- En optique, l'agrandissement d'un objet situé à une distance p d'une lentille convexe de distance focale f ($f > p$) est donné par $A = \dfrac{f}{f-p}$, ce qui nécessite la résolution d'une équation fractionnaire si p est inconnu ou d'une inéquation si l'agrandissement doit être au moins égal à une valeur donnée.
- Pour calculer la norme de la résultante de deux forces de directions perpendiculaires, après application du théorème de Pythagore, on est amené à calculer une racine carrée.
- Le rayon d'une sphère dont on connaît le volume (excès de liquide lorsqu'on plonge une bille dans un récipient rempli d'eau par exemple) exige le calcul d'une racine cubique.
- Quant aux valeurs absolues, on les utilise notamment pour exprimer la distance entre deux réels donc lorsqu'on travaille avec des valeurs approchées à ε près ou encore pour les erreurs absolue ou relative.

etc !

A propos de cette liste

Cette liste d'exercices est assez détaillée : elle reprend non seulement les énoncés à résoudre lors de la première séance, mais elle donne aussi des indications quant à la démarche à suivre et aux « questions à se poser » lors de la confrontation à la résolution.

A résoudre PENDANT de la répétition (et à achever à domicile si nécessaire)

I. Problème élémentaire

Résoudre le problème suivant en **rédigeant** la solution selon le schéma donné ci-dessous :

1. Quelles sont les données ?
2. Que cherche-t-on ?
3. Si on nomme x l'inconnue, que représente x de façon précise ?
4. Que peut-on calculer successivement ?
5. Quelle est l'équation obtenue ?
6. La résoudre.
7. Donner la solution du problème en rédigeant une conclusion.

1 litre d'eau de mer pèse 1,025 kg et contient 3% *de son poids en sel. Combien de litres d'eau pure doit-on ajouter à 2 litres d'eau de mer pour obtenir de l'eau contenant* 1% *de son poids en sel ?*

II. Résolution d'équations (x est l'inconnue réelle)

Résoudre les équations suivantes sans oublier d'indiquer les liens entre les différentes équations intervenant dans la résolution. Conclure l'exercice en indiquant l'ensemble des solutions.

$$a)\ \pi^2 x - \frac{1}{3} = -\frac{x}{\pi} \qquad b)\ 64x^2 + 1 = 0 \qquad c)\ 64x^3 + 1 = 0 \qquad d)\ 2x - \frac{2}{x} = 1$$

III. Valeur absolue et équations (x est l'inconnue réelle)

1. a) Si un réel est noté $x - 2$, définir la valeur absolue de $x - 2$.
   b) Dans ce cas, quelle est la valeur de x qui joue un rôle différent des autres valeurs ?
   c) Répondre aux mêmes questions en considérant le réel $x^2 - 2$.
2. Résoudre les équations suivantes sans oublier d'indiquer les liens entre les différentes équations intervenant dans la résolution. Conclure l'exercice en indiquant l'ensemble des solutions.

$$a)\ |-x + \sqrt{2}| = |-2x| \qquad b)\ \left|x^2 - |x^4|\right| + 1 = 0 \qquad c)\ \left|x^2 - |x^4|\right| - 1 = 0$$

IV. Résolution d'inéquations (x est l'inconnue réelle)

1. Si on a $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ $(a, b \in \mathbb{R}_0)$ peut-on toujours dire que cette inégalité est équivalente à $a > b$?
   a) Si oui, le prouver.
   b) Si non, donner un contre-exemple et dire dans quel(s) cas cette équivalence pourrait être correcte.
2. Résoudre les inéquations suivantes sans oublier d'indiquer les liens entre les différentes inéquations intervenant dans la résolution. Conclure l'exercice en indiquant l'ensemble des solutions

$$a)\ \frac{-1}{2x-1} \leq \frac{-1}{x-2} \qquad b)\ |3x - 2| > 3 \qquad c)\ \frac{1}{x-1} \geq \frac{1}{|5x - 2x^2 - 3|}$$

V. Racines de réels et puissances

1. Que valent (a) $\sqrt{(-\pi)^4}$ (b) $\sqrt[3]{(-4)^3}$?

2. a) Pour quelles valeurs de x la racine $\sqrt{4x^2}$ est-elle définie ?
   b) Peut-on dire que $\sqrt{4x^2} = 2x$? Justifier votre réponse.
   c) Si x est un réel négatif, que vaut $\sqrt{4x^2}$?
3. a) Si n est un naturel non nul, comparer les réels $(-x)^{2n}$ et $-x^{2n}$: sont-ils égaux ou différents ? Justifier votre réponse.
   b) Même question avec $(-x)^{2n+1}$ et $-x^{2n+1}$.

VI. Sommes et symboles sommatoires

1. a) On considère la somme $s_1 = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12$. Exprimer en français la somme considérée.
   b) Comment note-t-on de façon générale un terme de ce type ?
   c) Ecrire cette somme à l'aide d'un symbole sommatoire.
2. a) On considère la somme $s_2 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \frac{1}{81}$. Comment caractériser chacun des termes de cette somme sans tenir compte de son signe ?
   b) Comment, dans une somme, peut-on passer alternativement d'un terme positif à un terme négatif ?
   c) Ecrire s_2 à l'aide d'un symbole sommatoire.
3. On considère la somme $S_1 = \displaystyle\sum_{j=2}^{4} (-2)^{2j}$.
   a) Combien de termes cette somme comporte-t-elle ?
   b) Que vaut le terme correspondant à $j = 3$?
   c) Que vaut cette somme ?
   d) Si j variait de 2 à 20, quelle formule pratique pourrait-on utiliser pour calculer la somme ? L'appliquer sans calculer le résultat numérique final.
4. On considère la somme $S_2 = \displaystyle\sum_{l=0}^{7} (\sqrt[3]{2})^2$.
   a) Combien de termes cette somme comporte-t-elle ?
   b) Que vaut le terme correspondant à $l = 3$?
   c) Que vaut cette somme ?