Répétition 2 :
droites, trigonométrie et calcul vectoriel

A préparer AVANT de venir à la répétition

(Lors de la répétition, vous serez interrogé sur ces points de théorie.)

I. Equations cartésiennes de droites

On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé.

1. Quelle est la forme canonique de l'équation cartésienne d'une droite dans le plan ? Indiquer ce que représente chacune des lettres utilisées.
2. a) Quelle est l'équation cartésienne d'une droite passant par le point de coordonnées cartésiennes (x_1, y_1) et de coefficient angulaire m (x_1, y_1, m sont des réels) ?
   b) Si cette droite a pour vecteur directeur le vecteur de composantes (a, b), quel lien existe-t-il entre m et (a, b) ? a et b peuvent-ils être des réels quelconques ? Expliquer.
   c) Quel lien existe-t-il entre le coefficient angulaire d'une droite et la mesure de l'angle $\theta \in [0, \pi]$ que cette droite forme avec l'axe des abscisses ?
3. a) Quelle est l'équation cartésienne d'une droite passant par les points distincts de coordonnées cartésiennes respectives (x_1, y_1) et (x_2, y_2) ? Envisager tous les cas possibles.
   b) Si cette droite a pour vecteur directeur le vecteur de composantes (a, b), quel lien existe-t-il entre (x_1, y_1), (x_2, y_2) et (a, b) ?
4. Quelle est l'équation cartésienne d'une droite passant par le point de coordonnées cartésiennes (x_1, y_1) et parallèle à
   a) l'axe des abscisses ?
   b) l'axe des ordonnées ?
5. Si deux droites non parallèles aux axes sont
   a) orthogonales entre elles, que peut-on dire de leurs coefficients angulaires ?
   b) parallèles entre elles, que peut-on dire de leurs coefficients angulaires ?
6. Soit la droite passant par le point de coordonnées cartésiennes (x_1, y_1) et dont un vecteur directeur a pour composantes (a, b). Déterminer des équations paramétriques cartésiennes de cette droite.

II. Résolution de systèmes linéaires

Quels sont les processus les plus fréquemment utilisés pour résoudre les systèmes linéaires ?

III. Trigonométrie

1. a) Comment associe-t-on un point du cercle trigonométrique à un réel donné ?
   b) Etant donné un point du cercle trigonométrique associé à un réel x, comment définir le sinus et le cosinus de ce réel ?
2. a) Pour quelle(s) valeur(s) de x le réel $\sin(x)$ est-il nul ?
   b) Même question pour $\cos(x)$.
   c) Déduire des points précédents pour quelle(s) valeur(s) de x les réels $\mathrm{tg}(x)$ et $\mathrm{cotg}(x)$ sont définis.
3. a) Quelles sont les formules de trigonométrie qui lient au moins 2 des réels $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\mathrm{tg}(x)$ et $\mathrm{cotg}(x)$ si x est un réel ? Les citer.
   b) Quels signes ont ces nombres dans les différents quadrants ?
4. Quelles sont les formules de trigonométrie qui permettent de passer de sommes ou différences de nombres trigonométriques à des produits de tels nombres ? Les citer.
5. a) Comment peut-on transformer le cosinus d'un réel en un sinus sans utiliser la formule fondamentale de trigonométrie ?
   b) Si les sinus de 2 réels sont égaux, que peut-on dire de ces réels à un multiple entier de 2π près ?

6. Si les cosinus de 2 réels sont égaux, que peut-on dire de ces réels à un multiple entier de 2π près ?

IV. Vecteurs - Produits scalaire et vectoriel

1. Dans un repère orthonormé d'origine O du plan, on définit le vecteur $\overrightarrow{AB}$ par son origine A et son extrémité B.
   a) Comment écrire $\overrightarrow{AB}$ comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$.
   b) Quelles sont les composantes des vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{AB}$ si A et B ont respectivement pour coordonnées (x_A, y_A) et (x_B, y_B) ?

2. On fixe une base orthonormée de l'espace, notée $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$, $\vec{u_3}$.
   a) Comment calcule-t-on le produit scalaire de 2 vecteurs de l'espace dont on connaît les composantes dans une base orthonormée ? Exprimer la réponse en français et en symboles mathématiques. Quel type d'élément mathématique obtient-on ?
   b) Comment calcule-t-on le produit vectoriel de 2 vecteurs de l'espace dont on connaît les composantes dans une base orthonormée ? Exprimer la réponse en symboles mathématiques. Quel type d'élément mathématique obtient-on ?
   c) Le produit scalaire de 2 vecteurs est-il commutatif ? Et le produit vectoriel ?

Préambule

On utilise notamment la trigonométrie en mécanique (plan incliné, mouvement circulaire), en électricité (courant alternatif), pour étudier les phénomènes ondulatoires (vagues, ondes sismiques, son, lumière, ondes radio ...). Beaucoup de phénomènes naturels varient de façon périodique (alternance d'inspirations et d'expirations dans la respiration, hauteur de la marée à un endroit précis ...) et il est parfois possible de représenter de tels comportements grâce à des fonctions trigonométriques.

Classiquement, on définit un *nombre trigonométrique* comme étant une valeur d'une fonction trigonométrique (sinus, cosinus, tangente, cotangente). Les nombres trigonométriques sont fondamentaux dans l'expression des coordonnées cartésiennes d'un point du plan à l'aide des coordonnées polaires et dans la forme trigonométrique (ou polaire) des nombres complexes.

En analyse, les fonctions trigonométriques sont des fonctions définies sur l'ensemble des réels ou sur une partie de celui-ci. La définition géométrique contient celle de la notion de « mesure d'angle » en radians. Une autre mesure d'angle est bien sûr le degré, 2π radians correspondant à 360 degrés. *Avez-vous une idée d'où provient la mesure en degrés (et ... pourquoi 360 degrés ?) et connaissez-vous un avantage primordial de la mesure en radians ?*

La notion de vecteur est fondamentale en physique ; elle est notamment utilisée pour caractériser un déplacement, une vitesse, une force, un champ électromagnétique. En effet, un vecteur permet de modéliser des grandeurs qui ne peuvent être complètement définies par un nombre comme une température ou une masse. Pour définir un déplacement, par exemple, on a besoin d'une direction et d'un sens en plus d'une longueur. On utilise le produit scalaire pour déterminer le travail d'une force ou la projection orthogonale d'un vecteur sur une droite. Le produit vectoriel intervient dans le calcul du moment d'une force par rapport à un point, pour déterminer la force magnétique dans un champ ...

A propos de cette liste

Cette liste d'exercices est assez détaillée : elle reprend non seulement les énoncés à résoudre lors de la séance, mais elle donne aussi des indications quant à la démarche à suivre et aux « questions à se poser » lors de la confrontation à la résolution.

A résoudre PENDANT de la répétition (et à achever à domicile si nécessaire)

I. Equations cartésiennes de droites

On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé.

1. Sans en déterminer l'équation cartésienne, représenter graphiquement la droite passant par le point de coordonnées cartésiennes $(1,-2)$ et de coefficient angulaire $-\frac{1}{2}$.
2. Donner l'équation cartésienne de la droite passant par le point de coordonnée $(1,0)$ et orthogonale à la droite d'équation $2x+y+2=0$. Représenter graphiquement ces deux droites dans un même repère.
3. a) Donner l'équation cartésienne de la droite passant par les points de coordonnées $(2,3)$ et $(1,2)$ ainsi que celle de la droite passant par $(2,3)$ et $(2,0)$.
   b) Représenter graphiquement ces deux droites dans un même repère.
4. On considère la droite d'équation cartésienne $2x+y+2=0$.
   a) Déterminer les composantes d'un vecteur directeur de cette droite.
   b) Déterminer les coordonnées cartésiennes d'un point de cette droite.
   c) Déterminer des équations paramétriques cartésiennes de cette droite.
   d) La droite passe par le point de coordonnées $(-\sqrt{2}, 2\sqrt{2}-2)$; à quelle valeur du paramètre correspond ce point ?

II. Résolution de systèmes linéaires

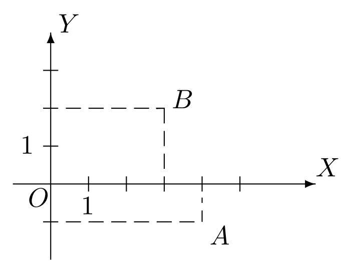
1. a) Si on considère l'équation $2y-x=3$, représenter graphiquement l'ensemble des solutions dans un repère cartésien du plan. Quel est le nom de cette courbe ?
   b) Résoudre le système $\left\{\begin{array}{l} y+x=0 \\ 2y-x=3 \end{array}\right.$
   Ne pas oublier de mentionner l'ensemble des solutions.
   c) Comment interpréter graphiquement ce système et son ensemble de solutions ?
2. a) Dans le plan, représenter graphiquement les solutions du système $\left\{\begin{array}{l} 2x-y+1=0 \\ 4x-2y+5=3 \end{array}\right.$
   b) Comment interpréter graphiquement ce système et son ensemble de solutions ?
   c) Résoudre ce système et donner son ensemble de solutions.
   d) Faire de même avec le système $\left\{\begin{array}{l} 2x-y+1=0 \\ 4x-2y+5=0 \end{array}\right.$
3. a) Si on considère l'équation $y+2x+z=2$, comment peut-on représenter graphiquement les solutions dans un repère cartésien de l'espace ? Quel est le nom de cet élément ?
   b) Si on a un système formé de deux équations de ce type, quelles situations peut-on avoir graphiquement ? En déduire le type d'ensemble de solutions dans chacun des cas.
   c) Résoudre $\left\{\begin{array}{l} y+2x+z=2 \\ y-2x+2z=0 \end{array}\right.$

III. Trigonométrie

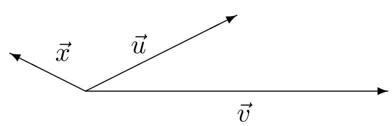
1. a) Si $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$, dans quel quadrant travaille-t-on ?
   b) Dans ce quadrant, on sait que $\mathrm{tg}(x) = -\frac{4}{3}$. Sans utiliser de calculatrice, déterminer la valeur des trois autres nombres trigonométriques ?
2. a) Pour quelle(s) valeur(s) de x l'expression $\mathrm{tg}(x)+\mathrm{cotg}(x)-\dfrac{1}{\sin(x)\cos(x)}$ est-elle définie ?
   b) En simplifiant cette expression, montrer qu'elle est indépendante de x.

3. a) Rapprocher $\sin^4(x) + 2\sin^2(x)\cos^2(x) + \cos^4(x)$ d'une autre expression du même type qui permettrait de simplifier cette expression. Laquelle envisager ?
b) Transformer l'expression ci-dessus en utilisant la formule trouvée pour montrer que cette expression est indépendante de x.
4. a) Parmi les formules de trigonométrie, quelle est celle qui permet de transformer un double produit de sinus cosinus ? La citer.
b) Prouver que $4\sin\left(\frac{7\pi}{24}\right)\cos\left(\frac{11\pi}{24}\right) = \sqrt{2} - 1$.
5. a) Résoudre l'équation $\sin(4x) = \cos(2x)$ (note : x est l'inconnue réelle)
b) Parmi toutes les solutions de cette équation, déterminer celles qui appartiennent à l'intervalle $[0, 2\pi]$.
6. a) Résoudre l'équation $\cos(4x) = \cos(2x)$ (note : x est l'inconnue réelle)
b) Parmi toutes les solutions de cette équation, déterminer celles qui appartiennent à l'intervalle $[0, 2\pi]$.
7. a) Si un produit de 2 facteurs est négatif, que peut-on affirmer à propos de ces facteurs ?
b) Transformer $\sin(2x)$ en un produit de 2 facteurs.
c) Résoudre $\sin(2x) \leq \cos(x)$ (note : x est l'inconnue réelle)
d) Parmi toutes les solutions, déterminer celles qui appartiennent à l'intervalle $[0, 2\pi]$.

IV. Vecteurs - Produits scalaire et vectoriel



1. a) Quelles sont les composantes des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ dans la base correspondant au repère orthonormé ci-contre ?
b) Donner les composantes de $\overrightarrow{AB}$
2. Soit la base du plan définie par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
a) Si $\vec{a} = \frac{2}{3}\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v}$, donner les composantes de $\vec{a}$ dans la base $\vec{u},\ \vec{v}$.
b) Représenter $\vec{a}$.



c) On considère le vecteur $\vec{x}$. Le décomposer comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ puis en donner les composantes dans cette base.
3. On fixe une base orthonormée de l'espace, notée $\vec{u_1},\ \vec{u_2},\ \vec{u_3}$.
a) Si $\vec{a} = \frac{1}{2}\vec{u_1} + 2\vec{u_2}$, quelles sont les composantes de $\vec{a}$ dans cette base ?
b) De même pour $\vec{b} = \vec{u_1} + \vec{u_2} - \vec{u_3}$.
c) Déterminer le produit scalaire $\vec{a} \bullet \vec{b}$.
d) Déterminer le produit vectoriel $\vec{b} \wedge \vec{a}$.
e) Déterminer les composantes du vecteur $\vec{x} = 2\vec{b} - \vec{b} \wedge \vec{a}$, celles de $\vec{y} = (\vec{a} \bullet \vec{b})\vec{a}$ et celles de $\vec{z} = \vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{a})$.
4. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère le point P_1 de coordonnées cartésiennes x_1, y_1, telles que $0 < x_1 < y_1$. On fait tourner le vecteur $\overrightarrow{OP_1}$ de 30° dans le sens trigonométrique, en le maintenant lié à l'origine O. En fonction des coordonnées de P_1, déterminer les coordonnées cartésiennes de l'extrémité P_2 du vecteur obtenu après rotation.
a) Représenter graphiquement la situation.
b) En faisant appel à la trigonométrie, écrire les coordonnées de P_1 sous une autre forme.
c) En déduire les coordonnées de P_2.
d) Donner les coordonnées de P_2 en fonction de x_1 et y_1.

5. Un palet de hockey de 0,5 kg glisse (la friction est négligeable) sur une patinoire (horizontale) suite à l'action de 2 forces horizontales. La première, d'une intensité de 8 N, fait un angle de 45° avec la direction d'une droite qui, dans un repère orthonormé, a pour équation cartésienne $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$. La seconde a une intensité de 4 N et fait un angle de $-15°$ avec cette même direction.
   Déterminer la valeur de l'accélération du palet ($\vec{F} = m\vec{a}$) ainsi que sa projection orthogonale sur une droite dont la direction est orthogonale à celle de la droite donnée.
   a) Représenter graphiquement le problème ci-dessus.
   b) Quelle est la mesure de l'angle formé par la droite d'équation $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ avec l'axe des abscisses ?
   c) Quel est l'angle formé par $\overrightarrow{F_1}$ avec l'axe des abscisses ? Même question pour $\overrightarrow{F_2}$.
   d) Donner les composantes de $\overrightarrow{F_1}$ et de $\overrightarrow{F_2}$ dans la base correspondant au repère orthonormé en simplifiant au maximum leur expression.
   e) Déterminer la résultante de ces 2 forces ainsi que ses composantes.
   f) Quelles sont les composantes de l'accélération $\vec{a}$?
   g) Donner les composantes d'un vecteur directeur de toute droite orthogonale à la droite donnée.
   h) Quelle est l'expression vectorielle de la projection orthogonale d'un vecteur sur une droite vectorielle ?
   i) Déterminer la projection orthogonale demandée de $\vec{a}$.