Mathématiques générales 2011-2012
30 mars 2012

Se poser des questions . . .

Question 1 Soit un nombre réel a. On définit alors les deux réels

$$r_1 = \sin(\cos a), \qquad r_2 = \cos(\sin a).$$

Lequel des deux est le plus grand ? Et pourquoi ?

Question 2 On donne deux points du plan, notés A et B, situés du même coté d'un miroir. Un rayon de lumière se propage de A à B en se réfléchissant sur le miroir. Déterminer géométriquement le point P du miroir pour que la longueur du trajet de A vers B soit minimale.

Question 3 Démontrer qu'il n'existe pas de naturels p, q tels que $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$.

Question 4 Soient des réels a, b, c. On fixe également un repère orthonormé. Démontrer que l'ensemble des points du plan dont les coordonnées cartésiennes (x, y) vérifient la relation

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

est soit l'ensemble vide, soit un cercle (dans ce cas, quelles sont les coordonnées du centre et que vaut son rayon ?)

Question 5 Le nombre d'or est le réel (plus grand que 1) défini comme étant le quotient de deux longueurs, celles-ci étant telles que le quotient de leur somme et de la plus grande soit égal au quotient de la plus grande et de la plus petite. Que vaut le nombre d'or ?

Question 6 La suite de Fibonacci est l'une des suites mathématiques les plus connues. Elle doit son nom au mathématicien italien Leonardo Pisano, plus connu sous le pseudonyme de Fibonacci (1175 - 1250). Dans un problème posé dans un de ses ouvrages, Fibonacci décrit la croissance d'une population de lapins : *Possédant initialement un couple de lapins, combien de couples obtient-on en douze mois si chaque couple engendre tous les mois un nouveau couple à compter du second mois de son existence ?*

Ce problème est à l'origine de la suite dont le n-ème élément (noté $\mathcal{F}_n$) correspond au nombre de paires de lapins au n-ème mois. Dans cette population (idéale), on suppose que :
- le premier mois, il y a juste une paire de lapereaux
- les lapereaux ne sont pubères qu'à partir du deuxième mois
- chaque mois, toute paire susceptible de procréer engendre effectivement une nouvelle paire de lapereaux
- les lapins ne meurent jamais.

Le taux de croissance des nombres de Fibonacci, c'est-à-dire la suite

$$\frac{\mathcal{F}_{n+1}}{\mathcal{F}_n},\ n \in \mathbb{N}_0$$

converge vers le nombre d'or. Pourquoi ?

Question 7
- Soient p, q, n des naturels strictement plus grands que 1. Si A, B désignent deux matrices respectivement de format $p \times q$ et $q \times n$, démontrer que la transposée du produit de A par B est égal au produit de la transposée de B par la transposée de A (dans l'ordre).
- Si C et D sont deux matrices carrées inversibles de même dimension, démontrer que leur produit est aussi inversible et que son inverse est égal au produit de l'inverse de D par l'inverse de C (dans l'ordre).
- Démontrer qu'une matrice carrée est inversible si et seulement si elle ne possède pas la valeur propre 0.

Mathématiques générales 2011-2012
16 avril 2012

Se poser des questions (cf 30 mars 2012, au cours)... : quelques indications pour y répondre

---

Question 1.
Soit un nombre réel a. On définit alors les deux réels

$$r_1 = \sin(\cos a), \qquad r_2 = \cos(\sin a).$$

Lequel des deux est le plus grand ? Et pourquoi ?

Suggestion. Le réel $\sin a$ appartient à l'intervalle $[-1, 1]$, lequel est inclus dans l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. La fonction cos étant à valeurs strictement positives quand on restreint son domaine de définition à ce dernier intervalle, on obtient

$$0 < r_2 = \cos(\sin a).$$

Examinons maintenant r_1.
- Si $a \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, alors $-1 \leq \cos a \leq 0$; comme la fonction sin est à valeurs négatives quand on restreint son domaine de définition à l'intervalle $[-1, 0]$, on obtient

$$r_1 = \sin(\cos a) \leq 0$$

donc dans ce cas, on a bien

$$r_1 < r_2.$$

- Quel que soit le réel x de l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on a [1]

$$0 < \sin x < x < \frac{\pi}{2} \qquad (*)$$

Il s'ensuit que si $a \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, alors $0 < \sin a < a < \frac{\pi}{2}$ et aussi [2] $\sin(\cos a) < \cos a$. Dès lors, en utilisant la propriété de décroissance de la fonction cos quand on restreint son domaine de définition à l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on obtient

$$r_2 = \cos(\sin a) > \cos a > \sin(\cos a) = r_1.$$

- Si $a \in \left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right[$, alors $2\pi - a \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Comme $r_1 = \sin(\cos a) = \sin(\cos(2\pi - a))$ et $r_2 = \cos(\sin a) = cos(\sin(2\pi - a))$, on obtient également

$$r_1 < r_2$$

par le cas précédent.
- Enfin, on a $\sin(\cos 0) = \sin 1 < \cos(\sin 0) = \cos 0 = 1$.

En conclusion, quel que soit $a \in [0, 2\pi[$, c'est le réel r_2 qui est le plus grand ; et on conclut que relation est vraie quelle que soit la valeur de a en utilisant la périodicité des fonctions sin et cos.

Question 2.
On donne deux points du plan, notés A et B, situés du même coté d'un miroir. Un rayon de lumière se propage de A à B en se réfléchissant sur le miroir (au point P). Déterminer géométriquement le point P du miroir pour que la longueur du trajet de A vers B soit minimale.

Suggestion [3]. Notons B' le point du plan obtenu comme image de B par la symétrie orthogonale par rapport au miroir. La somme des longueurs des segments AP et PB est égale à la somme des longueurs des segments [4] AP et PB'. Cette dernière somme est minimale lorsque les points A, P et B' sont alignés. Le point P est donc le point d'intersection de la droite joignant A et B' et du miroir.

---

1. pourquoi ?
2. pourquoi ?
3. Représenter graphiquement la situation !
4. pourquoi ?

Question 3.

Démontrer [5] **qu'il n'existe pas de naturels p, q tels que** $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$.

Suggestion. Etapes pour la preuve. (Preuve ≪ par l'absurde ≫)
On suppose avoir deux entiers vérifiant la propriété.

- On simplifie la fraction au maximum. On suppose donc que p et q sont premiers entre eux.
- De l'égalité de départ, on tire que $p^2 = 2q^2$, donc que p^2 est pair. On en déduit [6] que p est pair aussi.
- On écrit alors $p = 2n$ où n est un naturel strictement positif. On obtient alors $4n^2 = p^2 = 2q^2$ d'où aussi $q^2 = 2n^2$.
- Comme précédemment, on en déduit que q est pair.
- Conclusion : on a obtenu que p ET q sont pairs, ce qui est absurde puisqu'on a supposé qu'ils étaient premiers entre eux.
- CQFD

Question 4.
Soient des réels a, b, c. On fixe également un repère orthonormé. Démontrer que l'ensemble des points du plan dont les coordonnées cartésiennes (x, y) vérifient la relation

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

est soit l'ensemble vide, soit un cercle (dans ce cas, quelles sont les coordonnées du centre et que vaut son rayon ?)

Suggestion. On a $x^2 + ax = (x + \frac{a}{2})^2 - \frac{a^2}{4}$. On fait de même avec les termes contenant le facteur y... etc

Question 5.
Le nombre d'or est le réel (plus grand que 1) défini comme étant le quotient de deux longueurs, celles-ci étant telles que le quotient de leur somme et de la plus grande soit égal au quotient de la plus grande et de la plus petite. Que vaut le nombre d'or ?

Résolu au cours

Question 6.
La suite de Fibonacci est l'une des suites mathématiques les plus connues. Elle doit son nom au mathématicien italien Leonardo Pisano, plus connu sous le pseudonyme de Fibonacci (1175 - 1250). Dans un problème posé dans un de ses ouvrages, Fibonacci décrit la croissance d'une population de lapins : *Possédant initialement un couple de lapins, combien de couples obtient-on en douze mois si chaque couple engendre tous les mois un nouveau couple à compter du second mois de son existence ?*

Ce problème est à l'origine de la suite dont le n-ème élément (noté $\mathcal{F}_n$) correspond au nombre de paires de lapins au n-ème mois. Dans cette population (idéale), on suppose que :
- le premier mois, il y a juste une paire de lapereaux
- les lapereaux ne sont pubères qu'à partir du deuxième mois
- chaque mois, toute paire susceptible de procréer engendre effectivement une nouvelle paire de lapereaux
- les lapins ne meurent jamais.

Le taux de croissance des nombres de Fibonacci, c'est-à-dire la suite

$$X_n = \frac{\mathcal{F}_{n+1}}{\mathcal{F}_n}, \ n \in \mathbb{N}_0$$

converge vers le nombre d'or. Pourquoi ?

Suggestion. Notons $\mathcal{F}_n$ le nombre de couples de lapins au mois n. Jusqu'à la fin du deuxième mois, la population se limite à un couple (ce qu'on note $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2 = 1$). Dès le début du troisième mois, le couple de lapins a deux mois et il engendre un autre couple de lapins. On note alors $\mathcal{F}_3 = 2$. Plaçons-nous maintenant au mois n et cherchons à exprimer ce qu'il en sera deux mois plus tard $n + 2$: $\mathcal{F}_{n+2}$ désigne la somme des couples de lapins au mois $n + 1$ et des couples

---

5. Ceci est bien sûr une preuve du fait qu'il n'existe pas de rationnel dont le carré est égal à 2... d'où la nécessité d'introduire les nombres réels !
6. comment ?

nouvellement engendrés. Or, n'engendrent au mois $n+2$ que les couples pubères, c'est-à-dire ceux qui existent deux mois auparavant (au mois n). On a donc :

$$\mathcal{F}_{n+2} = \mathcal{F}_{n+1} + \mathcal{F}_n$$

Nous obtenons ainsi la forme récurrente de la suite de Fibonacci : chaque terme de cette suite est la somme des deux termes précédents ; pour obtenir chacun de ces deux termes, il faut faire la somme de leurs termes précédents. . .et ainsi de suite, jusqu'à ce que ces deux termes soient les deux termes initiaux, $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$, qui sont connus.

Au douzième mois, on a $\mathcal{F}_{12} = 144$ lapins.

De plus, on a

$$\mathcal{F}_{n+2} = \mathcal{F}_{n+1} + \mathcal{F}_n \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mathcal{F}_{n+2}}{\mathcal{F}_{n+1}} = 1 + \frac{\mathcal{F}_n}{\mathcal{F}_{n+1}}$$

donc on a

$$X_{n+1} = 1 + \frac{1}{X_n} \qquad (**)$$

quel que soit le naturel n. On montre[7] que la suite $X_n,\ n \in \mathbb{N}_0$ converge vers une limite finie (nécessairement positive si la condition initiale l'est) ; notons-la X. En passant à la limite dans (**), on obtient que X vérifie $X = 1 + \frac{1}{X}$. On est alors ramené à l'équation dont la solution (positive) est le nombre d'or (cf une des questions précédentes).

Question 7.

- Soient p, q, n des naturels strictement plus grands que 1. Si A, B désignent deux matrices respectivement de format $p \times q$ et $q \times n$, démontrer que la transposée du produit de A par B est égal au produit de la transposée de B par la transposée de A (dans l'ordre).

- Si C et D sont deux matrices carrées inversibles de même dimension, démontrer que leur produit est aussi inversible et que son inverse est égal au produit de l'inverse de D par l'inverse de C (dans l'ordre).

- Démontrer qu'une matrice carrée est inversible si et seulement si elle ne possède pas la valeur propre 0.

Suggestion. Les deux premiers points ont été traités le 30 mars.

Donnons quelques suggestions pour démontrer la troisième affirmation :

- montrer que le produit des valeurs propres d'une matrice carrée est égal au déterminant de cette matrice
- conclure en utilisant le fait qu'une matrice est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.

7. comment ?