
Université
de Liège



1, 2, 3... Sciences

Année académique 2011-2012

Mathématiques générales

LISTES TYPE

RÉPÉTITIONS CHIMIE, GÉOGRAPHIE ET PHYSIQUE

LISTE 8 : SUITES

A préparer AVANT de venir à la répétition

I. Définitions

1. Une suite est une fonction dont le domaine de définition est l'ensemble des naturels ou des entiers ou encore un sous-ensemble infini de ceux-ci.
2. une sous-suite de la suite x_m ($m \in \mathbb{N}_0$) est une suite dont les éléments sont pris dans l'ensemble $\{x_m : m \in \mathbb{N}_0\}$ en conservant la croissance stricte des indices. Une sous-suite de la suite x_m ($m \in \mathbb{N}_0$) est une suite notée $x_{k(m)}$ ($m \in \mathbb{N}_0$) avec $k(m) < k(m+1)$ pour tout m .
3. Une suite de réels x_m ($m \in \mathbb{N}_0$) converge
 - 1) vers un nombre a si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $M \in \mathbb{N}_0$ tel que $|x_m - a| \leq \varepsilon, \forall m \geq M$.
 - 2) vers l'infini si, pour tout $R > 0$, il existe $M \in \mathbb{N}_0$ tel que $|x_m| \geq R, \forall m \geq M$.On démontre que si une suite converge, sa limite est unique.
4. Une suite numérique réelle x_m ($m \in \mathbb{N}_0$) est croissante (resp. décroissante) si $m < m' \Rightarrow x_m \leq x_{m'}$ (resp. $x_m \geq x_{m'}$) $\forall m, m' \in \mathbb{N}_0$.
Comment vérifier la croissance (resp. décroissance) d'une suite x_m ($m \in \mathbb{N}_0$) ?
 - a) Montrer que $x_{m+1} - x_m \geq 0$ (resp. ≤ 0) $\forall m \in \mathbb{N}_0$.
 - b) Si les éléments de la suite sont strictement positifs, on peut aussi montrer que $\frac{x_{m+1}}{x_m} \geq 1$ (resp. ≤ 1) $\forall m \in \mathbb{N}_0$.

II. Propriétés

1. Toute suite numérique réelle croissante (resp. décroissante) et majorée (resp. minorée) converge vers la borne supérieure (resp. inférieure) de l'ensemble de ses éléments.
2. Si la suite x_m ($m \in \mathbb{N}_0$) de complexes non nuls converge vers 0 (resp. ∞) alors la suite $\frac{1}{x_m}$ converge vers ∞ (resp. 0).
3. La suite x_m ($m \in \mathbb{N}_0$) converge vers l (réel ou ∞) si et seulement si toute sous-suite de x_m converge vers l .
Critère de divergence : si, d'une suite x_m ($m \in \mathbb{N}_0$), on peut extraire deux sous-suites qui convergent vers des limites différentes alors la suite x_m diverge.
4. Soit $a \in \mathbb{R}$. La suite a^m ($m \in \mathbb{N}_0$) $\left\{ \begin{array}{l} 1) \text{ converge vers } 0 \text{ si } |a| < 1 \\ 2) \text{ converge vers } \infty \text{ si } |a| > 1 \\ 3) \text{ converge vers } 1 \text{ si } a = 1 \\ 4) \text{ diverge si } a = -1 \end{array} \right.$
5. **Critère de comparaison** : soient 2 suites numériques réelles x_m et y_m ($m \in \mathbb{N}_0$).
Si la suite x_m converge vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) et si la suite y_m est telle que $x_m \leq y_m \forall m \in \mathbb{N}_0$ (resp. $y_m \leq x_m \forall m \in \mathbb{N}_0$) alors la suite y_m converge vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).
6. **Théorème de l'étau** : soient 3 suites numériques réelles x_m, y_m et z_m ($m \in \mathbb{N}_0$).
Si les suites x_m et y_m convergent vers a et si z_m est tel que $x_m \leq z_m \leq y_m \forall m \in \mathbb{N}_0$ alors la suite z_m converge vers a .

A résoudre PENDANT la répétition (et à achever à domicile si nécessaire)

REMARQUE

- L' exercice avec une étoile est destiné principalement aux physiciens.

Suites

1. Etudier la convergence des suites suivantes et préciser leur limite en cas de convergence :

a) $x_m = \frac{2m^2 + 5m + 1}{3m^2 + 2} \quad (m \in \mathbb{N})$

f) $x_k = \sqrt[k]{k^2} \quad (k \in \mathbb{N}_0)$

b) $x_n = \sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 - n + 1} \quad (n \in \mathbb{N})$

g) $x_n = \frac{n \sin(n!)}{n^2 + 1} \quad (n \in \mathbb{N})$

c) $x_n = n - \sqrt{n^3 - n^2} \quad (n \in \mathbb{N})$

h) $x_j = \frac{j!}{j^j} \quad (j \in \mathbb{N}_0)$

d) $x_n = \frac{2n + (-1)^n}{5n + (-1)^{n+1}} \quad (n \in \mathbb{N})$

i) $x_j = \frac{(j!)^2}{(2j)!} \quad (j \in \mathbb{N})$

e) $x_n = \ln(2n^2 - n) - \ln(3n + 1) \quad (n \in \mathbb{N}_0)$

j) $x_n = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 \quad (n \in \mathbb{N}_0)$

2. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ définie par

$$u_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$$

est divergente.

3. Montrer que la suite $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$ définie par récurrence selon

$$x_0 = \sqrt{2} \quad \text{et} \quad x_j = \sqrt{2 + x_{j-1}} \quad , \forall j \in \mathbb{N}_0$$

est croissante et majorée. En déduire la convergence et la limite de cette suite.

4. Etudier la convergence de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant les conditions suivantes :

$$x_0 > 0 \quad \text{et} \quad 0 < x_{n+1} \leq 2 - \frac{1}{x_n} \quad , \forall n \in \mathbb{N}.$$

Si la suite converge, en préciser la limite.

5. (*) Soient $a, b \in \mathbb{R}_0$ avec $a \neq 1$ ainsi que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$u_{n+1} = au_n + b.$$

i) En supposant que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, quelle est la seule limite L possible de cette suite ?

ii) Définissons $v_n = u_n - L$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique et en déduire l'éventuelle convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

iii) Application : considérons un carré de côté égal à 1. Partageons-le en 9 carrés égaux et colorions le carré central. Ensuite, pour chaque carré non colorié, réitérons le procédé. Notons A_n l'aire coloriée après l'étape n . Quelle est la limite de la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

1. Suggestion : Montrer par récurrence sur n que $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

LISTE 9 : SÉRIES (1)

A préparer AVANT de venir à la répétition

Définitions et propriétés

1. Qu'appelle-t-on
 - a) série de terme général x_m ($m \in \mathbb{N}_0$) ?
 - b) série convergente ? divergente ?
 - c) somme d'une série convergente ?
 - d) série géométrique ?
 - e) série de Riemann ?
2. Définir la fonction exponentielle par une série.
3. Dans quel cas une série géométrique converge-t-elle ? Que vaut alors sa somme ?
4. Dans quel cas une série de Riemann converge-t-elle ?
5. Que peut-on dire d'une série dont le terme général ne tend pas vers 0 ?
6. Citer
 - a) le critère de comparaison des séries
 - b) le critère des séries alternées

A résoudre PENDANT la répétition (et à achever à domicile si nécessaire)

Séries

1. Etudier la convergence des séries suivantes :

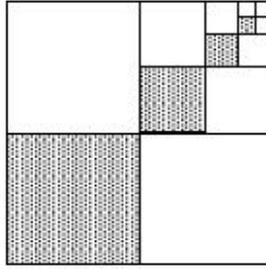
$$\begin{array}{llll} \text{a) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n^2)}{n^2} & \text{b) } \sum_{j=1}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^j & \text{c) } \sum_{j=0}^{+\infty} (-1)^j \frac{j^2 + 1}{j^3 + 1} & \text{d) } \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j^3 + \sqrt{3}} \\ \text{e) } \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^k}{\sqrt[3]{k}} & \text{f) } \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n \ln(n)} & \text{g) } \sum_{n=1}^{+\infty} n \sin\left(\frac{1}{n}\right) & \text{h) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{\sqrt{1+n^2}} \end{array}$$

2. Etudier la convergence des séries suivantes et préciser la somme de celles qui convergent :

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \sum_{j=0}^{+\infty} (\sqrt{2})^j & \text{b) } \sum_{j=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^j & \text{c) } \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{3^n}{n!} & \text{d) } \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{(j+1)(j+2)} \\ \text{e) } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^{n+2}}{5^n} & \text{f) } \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^{3k-1}}{k!} & \text{g) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} & \text{h) } \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sin \frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n+1}\right) \end{array}$$

3. Ecrire sous forme d'une série puis d'une fraction irréductible le réel $1,23333\dots$

4. Un carré de 4 cm de côté est divisé en quatre carrés identiques (en prenant ses médianes). Le carré inférieur gauche est ombré. Le carré supérieur droit est à nouveau divisé en quatre carrés identiques (en prenant ses médianes) et le carré inférieur gauche est ombré. On répète indéfiniment ce processus comme montré sur la figure ci-dessous. Quelle est la surface ombrée totale ?



5. Une balle est lâchée d'une hauteur de $2 m$. Chaque fois qu'elle frappe le sol, elle rebondit sur les trois quarts de la distance de sa chute. Quelle distance aura-t-elle parcourue quand elle sera complètement arrêtée ?

6. Démontrer l'égalité

$$\sin^2(\theta) + \sin^4(\theta) + \sin^6(\theta) + \dots = \tan^2(\theta).$$

A quelle(s) condition(s) cette égalité est-elle vraie ?

LISTE 10 : SÉRIES (2)

**A résoudre PENDANT la répétition
(et à achever à domicile si nécessaire)**

Séries

1. Etudier la convergence des séries suivantes :

$$\begin{array}{llll}
 \text{a) } \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{j^3 - j + 2}{j^3 + 5j^2 + 10} & \text{b) } \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{\sqrt{2}}{5}\right)^n & \text{c) } \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{k}}{(k+1)^2 + 1} & \text{d) } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{n^3 + 1} \\
 \text{e) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\pi}{7n + 15} & \text{f) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n^3 + 1}} \quad (p \in \mathbb{N}_0) & \text{g) } \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-ak} \quad (a \in \mathbb{R}) & \text{h) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + \ln(3)}
 \end{array}$$

2. Etudier la convergence des séries suivantes et préciser la somme de celles qui convergent (on donne $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $ab < c$ et $c \neq 0$) :

$$\begin{array}{llll}
 \text{a) } \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(\ln 2)^{j+3}}{j! \ln(4)} & \text{b) } \sum_{j=1}^{+\infty} \left(\frac{\sqrt{3}}{\pi}\right)^j & \text{c) } \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k^2 + 5k + 6} & \text{d) } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n b^{n+1}}{c^{n+2}} \\
 \text{e) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n(n+1)(n+2)} & \text{f) } \sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) & \text{g) } \sum_{k=1}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{k}{k+3}\right)
 \end{array}$$

3. Soit ABC un triangle rectangle isocèle tel que $|BC| = a$ cm ($a > 0$) comme représenté ci-dessous. Une puce qui se trouve en B se déplace le long d'une droite perpendiculaire au segment $[AC]$. Lorsqu'elle atteint ce segment, elle tourne et revient sur le segment $[AB]$ en prenant une route perpendiculaire à $[AB]$. Elle fait ainsi l'aller-retour entre les côtés $[AB]$ et $[AC]$ du triangle jusqu'à ce qu'elle atteigne le point A . Quelle sera la distance parcourue par la puce ?

