1, 2, 3... Sciences

Année académique 2011-2012

Corrigé de l'interrogation de math du 20 avril 2012

Version 19 avril 2012

Mathématiques générales B
Interrogation du vendredi 20/04/12, 08h15-10h15, C26 & A303

Questions de théorie

1. **(Toutes les sections) Qu'appelle-t-on *cofacteur* d'un élément d'une matrice carrée ?**
Solution. Voir cours.
2. **(Toutes les sections) Dans le cadre des résultats relatifs aux déterminants de matrices carrées, énoncer les deux lois appelées *Première loi des mineurs* et *Seconde loi des mineurs*.**
Solution. Voir cours.
3. **(Toutes les sections sauf les biologistes)**
- Soient A, A', B trois matrices carrées de même dimension telles que $AB = A'B$. Cela implique-t-il que $A = A'$? Pourquoi ?
Solution. Si la matrice B possède un inverse alors $AB = A'B$ implique $A = A'$. Sinon, l'implication est fausse : il suffit de prendre pour B la matrice nulle et d'avoir $A \neq A'$.
- Si A est une matrice carrée dont le déterminant vaut -5, cette matrice admet-elle une matrice inverse ? Justifier. Si la réponse est oui, que vaut le déterminant de cette matrice inverse ?
Solution. La matrice A admet une matrice inverse puisque son déterminant n'est pas nul. Comme le produit du déterminant d'une matrice par celui de son inverse vaut 1, le déterminant de A^{-1} vaut $-\frac{1}{5}$.

Exercices

1. **On donne les fonctions f, g et h explicitement par**

$$f(x,y) = \ln\left(x - y^2\right), \quad g(x,y) = \ln(2 - x - y), \quad h(x,y) = \ln\left((x - y^2)(2 - x - y)\right)$$

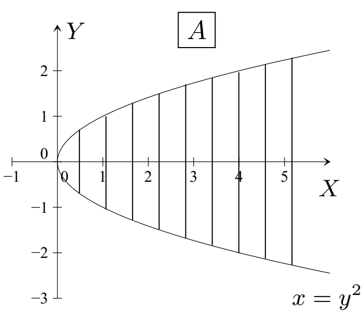
a) Déterminer les domaines de dérivabilité de ces trois fonctions.
Solution. Les domaines de dérivabilité de f, g et h sont respectivement les ensembles

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x - y^2 > 0\},\ B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2 - x - y > 0\},\ C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x - y^2)(2 - x - y) > 0\}.$$

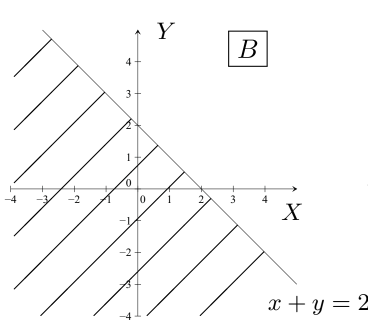
Ce dernier ensemble peut aussi s'écrire sous la forme

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x - y^2 > 0,\ 2 - x - y > 0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x - y^2 < 0,\ 2 - x - y < 0\}.$$

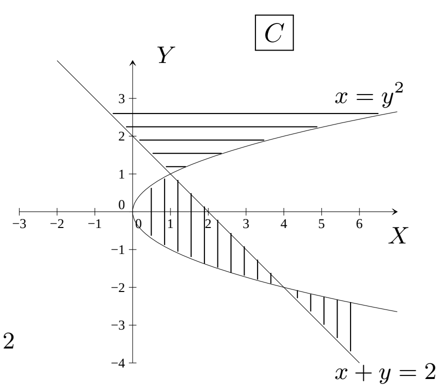
b) Donner une représentation graphique de ces trois domaines dans des repères orthonormés différents.
Solution. Voici les représentations graphiques de ces 3 ensembles (partie hachurée).



Les points de la parabole sont exclus de A.



Les points de la droite sont exclus de B.



Les points des “bords” sont exclus de C.

c) Les fonctions $f+g$ et h sont-elles égales ? Argumenter avec précision votre réponse.

Solution. Puisque $\ln u + \ln v = \ln(u.v)$ pour $u, v > 0$, les fonctions $f+g$ et h sont égales sur $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x - y^2 > 0,\ 2 - x - y > 0\}$.

d) Déterminer la valeur des dérivées partielles de la fonction f au point de coordonnées (2,1).

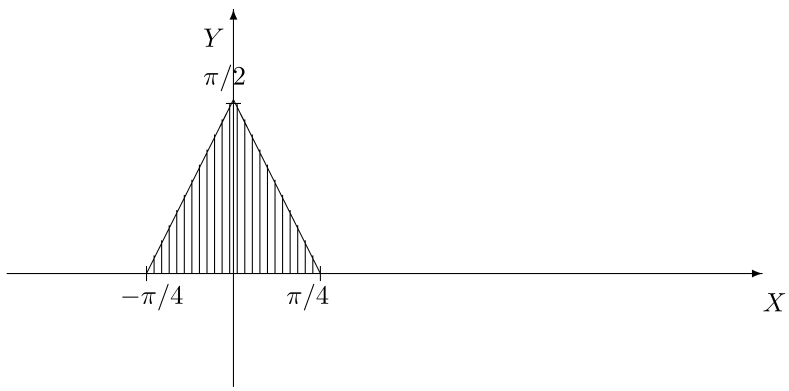
Solution. La fonction f est dérivable au point de coordonnées $(2,1)$. Comme

$$D_x f(x,y) = \frac{1}{x-y^2} \qquad \text{et} \qquad D_y f(x,y) = \frac{-2y}{x-y^2},$$

on a $D_x f(2,1) = 1$ et $D_y f(2,1) = -2$.

2. **On donne l'ensemble borné hachuré A suivant. Déterminer**

$$\iint_A \sin(2x+y)\ dx\ dy.$$



Solution. La fonction $f : (x,y) \mapsto \sin(2x+y)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ donc sur A, ensemble fermé borné ; dès lors, elle est intégrable sur A.
On a

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ x \in \left[\frac{y}{2} - \frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{4} - \frac{y}{2}\right]\right\},$$

dès lors on doit calculer

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{\frac{y}{2}-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}-\frac{y}{2}} \sin(2x+y)\ dx \right)\ dy.$$

Comme on a

$$I_1 = \int_{\frac{y}{2}-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}-\frac{y}{2}} \sin(2x+y)\ dx = \left[-\frac{\cos(2x+y)}{2}\right]_{\frac{y}{2}-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}-\frac{y}{2}} = -\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(2y - \frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}\sin(2y),$$

l'intégrale I vaut

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2y)\ dy = -\frac{1}{4}[\cos(2y)]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{4}(\cos(\pi) - \cos(0)) = \frac{1}{2}.$$

3. **Soit f une fonction intégrable sur une partie A du plan telle que**

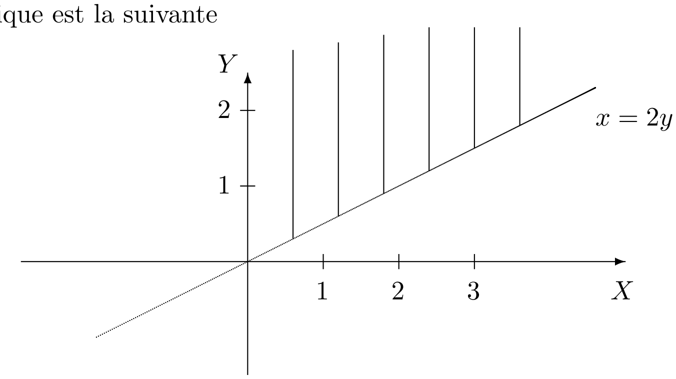
$$\iint_A f(x,y)\ dxdy \ = \ \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{2y} f(x,y)\ dx \right)\ dy.$$

a) Représenter l'ensemble d'intégration A dans un repère orthonormé (en le hachurant).

Solution. On a

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0,+\infty[, x \in [0,2y]\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,+\infty[, y \in \left[\frac{x}{2}, +\infty\right[\right\}.$$

Sa représentation graphique est la suivante



b) Permuter les intégrales.

Solution. En permutant les intégrales, on a

$$\iint_A f(x,y)\ dxdy = \int_0^{+\infty} \left(\int_{\frac{x}{2}}^{+\infty} f(x,y)\ dy \right) dx.$$

c) La fonction f donnée explicitement par $f(x,y) = xe^{-y}$ est-elle intégrable sur A ? Si la réponse est affirmative, déterminer la valeur de cette intégrale.

Solution. La fonction $f : (x,y) \mapsto xe^{-y}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ donc sur A non borné. De plus, elle est positive sur A.

Fixons x dans $[0,+\infty[$ et considérons la fonction $g : y \mapsto xe^{-y}$. Cette fonction est continue sur $\left[\frac{x}{2}, +\infty\right[$. Vérifions son intégrabilité en $+\infty$ en calculant

$$\lim_{t\to+\infty} \int_{\frac{x}{2}}^{t} xe^{-y}\ dy = \lim_{t\to+\infty} \left[-xe^{-y}\right]_{\frac{x}{2}}^{t} = \lim_{t\to+\infty} \left(-xe^{-t} + xe^{-\frac{x}{2}}\right) = xe^{-\frac{x}{2}}.$$

Comme cette limite est finie, g est intégrable en $+\infty$ donc sur $\left[\frac{x}{2}, +\infty\right[$ et $\int_{\frac{x}{2}}^{+\infty} xe^{-y}\ dy = xe^{-\frac{x}{2}}$.

Considérons la fonction $h : x \mapsto x\,e^{-\frac{x}{2}}$ continue sur $[0,+\infty[$. Vérifions son intégrabilité en $+\infty$ en calculant

$$\lim_{t\to+\infty} \int_0^t x\,e^{-\frac{x}{2}}\ dx = \lim_{t\to+\infty} \left[-2x\,e^{-\frac{x}{2}} - 4e^{-\frac{x}{2}}\right]_0^t = \lim_{t\to+\infty} \left(-2t\,e^{-\frac{t}{2}} - 4e^{-\frac{t}{2}} + 4\right) = 4$$

puisque $\lim_{t\to+\infty} \left(-2t\,e^{-\frac{t}{2}}\right) = 0$ par application du théorème de l'Hospital et $\lim_{t\to+\infty} \left(-4e^{-\frac{t}{2}}\right) = 0.$

Comme la limite est finie, h est intégrable en $+\infty$ donc sur $[0,+\infty[$ et f est intégrable sur A. De plus, comme $|f(x,y)| = f(x,y)\ \forall (x,y) \in A$, on a $\iint_A f(x,y)\ dx\ dy = 4$.