1, 2, 3. . . Sciences

Année académique 2011-2012

Mathématiques générales

Listes type

Répétitions 9 et 10 : Informatique

Version 28 mars 2012

Répétition 9 : Suites

A préparer AVANT de venir à la répétition

I. Définitions

1. Une suite est une fonction dont le domaine de définition est l'ensemble des naturels ou des entiers ou encore un sous-ensemble infini de ceux-ci.
2. une sous-suite de la suite x_m $(m \in \mathbb{N}_0)$ est une suite dont les éléments sont pris dans l'ensemble $\{x_m : m \in \mathbb{N}_0\}$ en conservant la croissance stricte des indices. Une sous-suite de la suite x_m $(m \in \mathbb{N}_0)$ est une suite notée $x_{k(m)}$ $(m \in \mathbb{N}_0)$ avec $k(m) < k(m+1)$ pour tout m.
3. Une suite de réels x_m $(m \in \mathbb{N}_0)$ converge
   1) vers un nombre a si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $M \in \mathbb{N}_0$ tel que $|x_m - a| \leq \varepsilon, \ \forall m \geq M$.
   2) vers l'infini si, pour tout $R > 0$, il existe $M \in \mathbb{N}_0$ tel que $|x_m| \geq R, \ \forall m \geq M$.
   On démontre que si une suite converge, sa limite est unique.
4. Une suite numérique réelle x_m $(m \in \mathbb{N}_0)$ est croissante (resp. décroissante) si $m < m' \Rightarrow x_m \leq x_{m'}$ (resp. $x_m \geq x_{m'}$) $\forall m,\, m' \in \mathbb{N}_0$.
   Comment vérifier la croissance (resp. décroissance) d'une suite x_m $(m \in \mathbb{N}_0)$?
   a) Montrer que $x_{m+1} - x_m \geq 0$ (resp. ≤ 0) $\forall m \in \mathbb{N}_0$.
   b) Si les éléments de la suite sont strictement positifs, on peut aussi montrer que $\dfrac{x_{m+1}}{x_m} \geq 1$ (resp. ≤ 1) $\forall m \in \mathbb{N}_0$.

II. Propriétés

1. Toute suite numérique réelle croissante (resp. décroissante) et majorée (resp. minorée) converge vers la borne supérieure (resp. inférieure) de l'ensemble de ses éléments.
2. Si la suite x_m $(m \in \mathbb{N}_0)$ de complexes non nuls converge vers 0 (resp. ∞) alors la suite $\dfrac{1}{x_m}$ converge vers ∞ (resp. 0).
3. La suite x_m $(m \in \mathbb{N}_0)$ converge vers l (réel ou ∞) si et seulement si toute sous-suite de x_m converge vers l.
   Critère de divergence : si, d'une suite x_m $(m \in \mathbb{N}_0)$, on peut extraire deux sous-suites qui convergent vers des limites différentes alors la suite x_m diverge.
4. Soit $a \in \mathbb{R}$. La suite a^m $(m \in \mathbb{N}_0)$ $\begin{cases} \text{1) converge vers 0 si } |a| < 1 \\ \text{2) converge vers } \infty \text{ si } |a| > 1 \\ \text{3) converge vers 1 si } a = 1 \\ \text{4) diverge si } a = -1 \end{cases}$
5. **Critère de comparaison** : soient 2 suites numériques réelles x_m et y_m $(m \in \mathbb{N}_0)$.
   Si la suite x_m converge vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) et si la suite y_m est telle que $x_m \leq y_m$ $\forall m \in \mathbb{N}_0$ (resp. $y_m \leq x_m$ $\forall m \in \mathbb{N}_0$) alors la suite y_m converge vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).
6. **Théorème de l'étau** : soient 3 suites numériques réelles $x_m,\ y_m$ et z_m $(m \in \mathbb{N}_0)$.
   Si les suites x_m et y_m convergent vers a et si z_m est tel que $x_m \leq z_m \leq y_m$ $\forall m \in \mathbb{N}_0$ alors la suite z_m converge vers a.

A résoudre PENDANT la répétition (et à achever à domicile si nécessaire)

Suites

1. Etudier la convergence des suites suivantes et préciser leur limite en cas de convergence :

a) $x_m = \dfrac{2m^2+5m+1}{3m^2+2}$ $(m \in \mathbb{N})$

b) $x_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$

c) $x_n = n - \sqrt{n^3-n^2}$ $(n \in \mathbb{N})$

d) $x_n = \dfrac{2n+(-1)^n}{5n+(-1)^{n+1}}$ $(n \in \mathbb{N})$

e) $x_n = \ln(2n^2-n) - \ln(3n+1)$ $(n \in \mathbb{N}_0)$

f) $x_k = \sqrt[k]{k^2}$ $(k \in \mathbb{N}_0)$

g) $x_n = \dfrac{n\sin(n!)}{n^2+1}$ $(n \in \mathbb{N})$

h) $x_j = \dfrac{j!}{j^j}$ $(j \in \mathbb{N}_0)$

i) $x_j = \dfrac{(j!)^2}{(2j)!}$ $(j \in \mathbb{N})$

j) [1] $x_n = \dfrac{1}{n^3}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2$ $(n \in \mathbb{N}_0)$

2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ définie par
$$u_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$$
est divergente.

3. Montrer que la suite $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence selon
$$x_0 = \sqrt{2} \qquad \text{et} \qquad x_j = \sqrt{2+x_{j-1}} \quad , \forall j \in \mathbb{N}_0$$
est croissante et majorée. En déduire la convergence et la limite de cette suite.

4. Etudier la convergence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant les conditions suivantes :
$$x_0 > 0 \qquad \text{et} \qquad 0 < x_{n+1} \leq 2 - \frac{1}{x_n} \quad , \forall n \in \mathbb{N}.$$
Si la suite converge, en préciser la limite.

5. Soient $a, b \in \mathbb{R}_0$ avec $a \neq 1$ ainsi que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par
$$u_{n+1} = au_n + b.$$
   i) En supposant que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, quelle est la seule limite L possible de cette suite ?
   ii) Définissons $v_n = u_n - L$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique et en déduire l'éventuelle convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   iii) Application : considérons un carré de côté égal à 1. Partageons-le en 9 carrés égaux et colorions le carré central. Ensuite, pour chaque carré non colorié, réitérons le procédé. Notons A_n l'aire coloriée après l'étape n. Quelle est la limite de la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

1. Suggestion : Montrer par récurrence sur n que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Répétition 10 : Séries

A préparer AVANT de venir à la répétition

Définitions et propriétés

1. Qu'appelle-t-on
   a) série de terme général x_m ($m \in \mathbb{N}_0$) ?
   b) série convergente ? divergente ?
   c) somme d'une série convergente ?
   d) série géométrique ?
   e) série de Riemann ?
2. Définir la fonction exponentielle par une série.
3. Dans quel cas une série géométrique converge-t-elle ? Que vaut alors sa somme ?
4. Dans quel cas une série de Riemann converge-t-elle ?
5. Que peut-on dire d'une série dont le terme général ne tend pas vers 0 ?
6. Citer
   a) le critère de comparaison des séries
   b) le critère des séries alternées

A résoudre PENDANT la répétition (et à achever à domicile si nécessaire)

Séries

1. Etudier la convergence des séries suivantes :

   a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n^2)}{n^2}$ b) $\displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^j$ c) $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} (-1)^j \frac{j^2+1}{j^3+1}$ d) $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j^3+\sqrt{3}}$

   e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^k}{\sqrt[3]{k}}$ f) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n\ln(n)}$ g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} 2^{2n}.3^{1-n}$

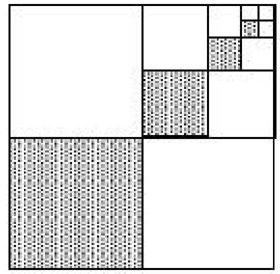
2. Etudier la convergence des séries suivantes et préciser la somme de celles qui convergent :

   a) $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} (\sqrt{2})^j$ b) $\displaystyle\sum_{j=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^j$ c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{3^n}{n!}$ d) $\displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{(j+1)(j+2)}$

   e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^{n+2}}{5^n}$ f) $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^{3k-1}}{k!}$ g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1}$ h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sin\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n+1}\right)$

3. Ecrire sous forme d'une série puis d'une fraction irréductible le réel $1,23333\ldots$.

4. Un carré de $4\,cm$ de côté est divisé en quatre carrés identiques (en prenant ses médianes). Le carré inférieur gauche est ombré. Le carré supérieur droit est à nouveau divisé en quatre carrés identiques (en prenant ses médianes) et le carré inférieur gauche est ombré. On répète indéfiniment ce processus comme montré sur la figure ci-dessous. Quelle est la surface ombrée totale ?



5. Une balle est lâchée d'une hauteur de $2\,m$. Chaque fois qu'elle frappe le sol, elle rebondit sur les trois quarts de la distance de sa chute. Quelle distance aura-t-elle parcourue quand elle sera complètement arrêtée ?

6. Démontrer l'égalité
$$\sin^2(\theta) + \sin^4(\theta) + \sin^6(\theta) + \ldots = \tan^2(\theta).$$
A quelle(s) condition(s) cette égalité est-elle vraie ?