
Université
de Liège



1, 2, 3... Sciences

Année académique 2011-2012

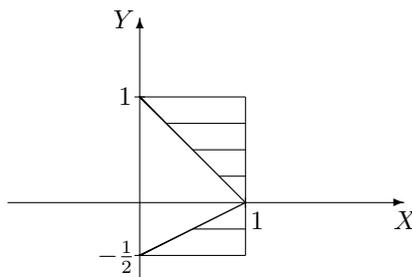
Mathématiques générales

LISTE DE RÉVISION EN VUE DE L'EXAMEN
RÉPÉTITIONS CHIMIE, GÉOGRAPHIE ET PHYSIQUE

LISTE DE REVISION

Fonctions de plusieurs variables

- On donne la fonction $f : (x, y) \mapsto \ln \left(\sqrt{\frac{x+y}{x-y}} \right)$.
 - Déterminer son domaine de définition, de dérivabilité et les représenter dans un repère ortho-normé.
 - Déterminer les dérivées partielles de cette fonction et, si possible, les évaluer au point de coordonnées $(-2, 1)$.
- Soit f une fonction continûment dérivable sur $] - 2, 1[\times] - 4, 4[$. On demande le domaine de dérivabilité de la fonction F définie par $F(x, y) = f(x + y^2, x^2 + 4y^2)$, sa représentation graphique ainsi que l'expression de ses dérivées partielles en fonction de celles de f .
- Si elles existent, calculer les intégrales suivantes
 - $I = \int_0^4 \left(\int_{\sqrt{x}}^2 x \sin(y^5) dy \right) dx$
 - $I = \iint_A e^{-y^2} dx dy$ si A est l'ensemble fermé borné hachuré ci-dessous



- $I = \iint_A \frac{1}{\sqrt{(1+x^2+y^2)^5}} dx dy$ si $A = [0, +\infty[\times [0, +\infty[$
 - $I = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^2 \frac{e^{-(y+1)x}}{4+y^2} dy \right) dx$
- Calculer le volume du corps de l'espace borné par les surfaces d'équation cartésienne $x + z = 6$ et $x + y^2 = 4$ et les plans d'équation $y = 0$, $z = 0$. Donner aussi une représentation graphique de ce corps.

Calcul matriciel

- Calculer (si elle existe) la matrice inverse de la matrice suivante puis montrer que la matrice trouvée est bien l'inverse de la matrice donnée si

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

- Rechercher les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice suivante. Cette matrice est-elle diagonalisable? Pourquoi? Si elle l'est, en déterminer une forme diagonale, ainsi qu'une matrice inversible qui y conduit puis prouver que les matrices données sont correctes.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -2 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Approximations polynomiales

Déterminer l'approximation polynomiale à l'ordre $n = 0, 1, 2$ et 3 en $x_0 = 0$ pour la fonction

$$f : x \mapsto \operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Représenter f et ses approximations.

Séries

1. Etudier la convergence des séries suivantes :

$$(1) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2 \sin(k\theta)}{k(k+1)} \quad (\theta \geq 0) \qquad (2) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^n}{n}.$$

2. Etudier la convergence des séries suivantes et préciser la somme de celles qui convergent :

$$(1) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{k}} \qquad (2) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{-2}{(2k+5)(2k+3)} \qquad (3) \sum_{n=3}^{+\infty} \left[\left(\frac{1}{4}\right)^n + \left(\frac{3}{4}\right)^n \right] \qquad (4) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln^n(x)}{n!} \quad (x > 0).$$