1, 2, 3... Sciences

Année académique 2011-2012

Mathématiques générales

Listes type

Répétitions Chimie, Géographie et Physique (suite)

Version 23 avril 2012

Liste 11 : Mathématiques appliquées (1)

Préambule

Les exercices de cette liste et de la suivante montrent des applications de notions mathématiques étudiées dans le cadre du cours de Mathématiques générales. Ces applications relèvent de la physique, de la biologie, du calcul des probabilités, de la géographie et même de la cryptographie.

A résoudre PENDANT la répétition (et à achever à domicile si nécessaire)

Fonctions de plusieurs variables

1. En thermodynamique, il existe essentiellement 3 types d'équilibres macroscopiques : l'équilibre thermique, l'équilibre mécanique et l'équilibre osmotique (mélange homogène [1]). Dès lors, par définition, un *équilibre thermodynamique* est atteint lorsque ces 3 équilibres sont réunis.
   Selon le premier postulat de la thermodynamique, *l'équilibre thermodynamique d'un système physique se définit à l'aide de* 3 *paramètres : l'énergie interne U, le volume V et le nombre de particules N du système.*
   Le second postulat stipule qu'*il existe une fonction S, dépendant de U, V et N, qui est maximale à l'équilibre thermodynamique.* Cette fonction est appelée *entropie* du système et la connaître, c'est connaître l'ensemble du système. Cette fonction permet de plus de déterminer les *équations d'état* qui régissent le système : ces dernières font intervenir les dérivées partielles de S et sont données par
   $$D_U S = \left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)_{V,N} = \frac{1}{T} \qquad D_V S = \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{U,N} = \frac{p}{T} \qquad D_N S = \left(\frac{\partial S}{\partial N}\right)_{V,U} = \frac{-\mu}{T}$$
   où
   – T est la température du système ;
   – p est la pression du système ;
   – μ est le potentiel chimique du système (qui renseigne sur l'équilibre osmotique d'un système [2]) ;
   et où les variables indicées sont considérées comme constantes.

   Sachant que l'entropie du *gaz de Van Der Waals* (archétype des gaz réels), est donnée par
   $$S = k_B N \ln \frac{V - Nv_0}{N} + \frac{3k_B N}{2} \ln \left(\frac{U + \frac{K_i N^2}{V}}{N}\right) + \frac{3k_B N}{2} \ln \left(\frac{4\pi m}{3\hbar^2}\right) + \frac{5}{2} k_B N$$
   où
   – k_B est la constante de Boltzmann et vaut approximativement $1,38.10^{-23} J/K$,
   – v_0 est le volume occupé par une particule et dans lequel les autres particules ne peuvent pénétrer,
   – $K_i > 0$ est le paramètre d'interaction entre les particules,
   – m est la masse d'une particule,
   – $\hbar$ est la constante de Planck et vaut $6,626.10^{-34} J.s$,
   déterminer les équations d'état d'un tel gaz lorsque le nombre de particules N est constant et, à partir de la première équation d'état, exprimer l'énergie interne U en fonction de V, N et T.

1. Par exemple, si on jette une goutte d'encre dans un verre d'eau, l'encre va "diffuser" dans le liquide et l'équilibre est atteint lorsque l'encre est mélangée de façon homogène avec l'eau.

2. De manière générale, si deux substances de potentiels chimiques respectifs μ_1, μ_2 sont mises en présence l'une de l'autre, l'équilibre thermodynamique est atteint lorsque $\mu_1 = \mu_2$.

2. La pression P (en kPa), le volume V (en l) et la température T (en K) d'une mole d'un gaz parfait sont liés par l'équation [3] :

$$PV = 8,31\,T.$$

Sachant que la température d'un tel gaz, qui est de $300K$, augmente à la vitesse de $0,1K/s$ et que son volume, qui est de $100\,l$, augmente à raison de $0,2\,l/s$, déterminer la vitesse de variation de la pression de ce gaz.

3. La recherche des extrema d'une fonction à une seule variable est relativement aisée : il suffit de rechercher les valeurs en lesquelles la dérivée de cette fonction s'annule et de voir s'il s'agit d'un minimum, d'un maximum ou d'un point d'inflexion. Cette recherche s'avère plus délicate pour une fonction de plusieurs variables. Cependant, pour une fonction de 2 variables, nous disposons du test suivant, appelé *test des dérivées partielles* :

> Soient A une partie de $\mathbb{R}^2$, $(a,b) \in A$ et $f : (x,y) \mapsto f(x,y)$ une fonction 2 fois continûment dérivable sur A telle que
> $$(D_x f)(a,b) = (D_y f)(a,b) = 0.$$
> Posons
> $$D = (D_x^2 f)(a,b)(D_y^2 f)(a,b) - [(D_x D_y f)(a,b)]^2.$$
> (a) Si $D > 0$ et si $(D_x^2 f)(a,b) > 0$ alors $f(a,b)$ est un minimum local de f ;
> (b) Si $D > 0$ et si $(D_x^2 f)(a,b) < 0$ alors $f(a,b)$ est un maximum local de f ;
> (c) Si $D < 0$ alors $f(a,b)$ n'est ni un minimum local, ni un maximum local de f ; (a,b) est appelé "point-selle" ;
> (d) Si $D = 0$ alors le test n'est pas concluant.

En se basant sur ce test,
a) rechercher les extrema ainsi que les points-selles de la fonction

$$f : (x,y) \mapsto f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1.$$

b) déterminer la distance [4] (c.-à-d. la plus courte distance) entre le point de coordonnées $(1,0,-2)$ et le plan d'équation cartésienne $x + 2y + z = 4$.

4. Si une charge électrique est répartie sur une région R et si la densité de charges (en unités par unités carrées) est donnée par $\rho(x,y)$ en un point(x,y) de R, alors la charge totale Q présente sur cette région est donnée par

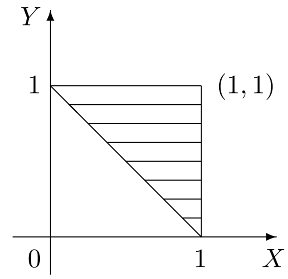
$$Q = \iint_R \rho(x,y)\,dxdy.$$

Une charge électrique est distribuée sur le domaine triangulaire D de la figure ci-dessous de manière telle que la densité de charge en (x,y) est donnée par $\rho(x,y) = xy$, mesurée en coulombs par mètre carrés (C/m^2). Calculer la charge totale présente sur D.

---

3. Cette équation est l'une des équations d'état d'un gaz parfait, obtenue par dérivation partielle de l'entropie d'un tel gaz (cf. exercice précédent).

4. Suggestion : la distance entre deux points de coordonnées (x_1,y_1,z_1) et (x_2,y_2,z_2) est donnée par
$$d = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 + (z_1-z_2)^2}$$
et, comme $d \geq 0$, minimiser d équivaut à minimiser d^2.



5. En physique, le *moment d'inertie* d'une masse ponctuelle m par rapport à un axe est défini par le produit mr^2, où r est la distance entre la masse ponctuelle m et l'axe. Cette notion se généralise au cas d'une plaque de métal, qui occupe une région R du plan et dont la densité en (x, y) est donnée par $\rho(x, y)$, de la manière suivante.
Le moment d'inertie d'une telle plaque par rapport à l'axe des abscisses (resp. des ordonnées) vaut
$$I_X = \iint_R x^2 \rho(x, y)\, dxdy \qquad \left(\text{resp. } I_Y = \iint_R y^2 \rho(x, y)\, dxdy\right).$$
Il peut également être intéressant de considérer le moment d'inertie par rapport à l'origine O, celui-ci étant donné par
$$I_O = \iint_R (x^2 + y^2)\rho(x, y)\, dxdy.$$
On remarque évidemment que $I_O = I_X + I_Y$.

Soit un disque homogène D de densité $\rho(x, y) = \rho$ et de diamètre d. Déterminer
a) le moment d'inertie de ce disque par rapport à son centre ;
b) le moment d'inertie de ce disque par rapport à une droite quelconque d' passant par son centre.

6. Dans certains contextes, le calcul de probabilités peut se ramener à du calcul intégral. En effet, lorsque l'on modélise une quantité X à l'aide d'une fonction de densité $x \mapsto f_X(x)$ continue et intégrable sur $\mathbb{R}$, la probabilité que cette quantité soit supérieure (resp. inférieure) à une valeur $a \in \mathbb{R}$ (resp. $b \in \mathbb{R}$) est donnée par
$$\mathbb{P}[X > a] = \int_a^{+\infty} f_X(x)\, dx \qquad \left(\text{resp. } \mathbb{P}[X < b] = \int_{-\infty}^{b} f_X(x)\, dx\right).$$
De plus, si l'on s'intéresse à une autre quantité Y que l'on désire étudier conjointement avec X, ces deux quantités peuvent être modélisées simultanément à l'aide d'une fonction de densité jointe $(x, y) \mapsto f_{(X,Y)}(x, y)$ continue, intégrable sur $\mathbb{R}^2$ et telle que
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x, y)\, dx \right) dy = 1,$$
auquel cas la probabilité que $(X, Y) \in R$ (R partie de $\mathbb{R}^2$) est donnée par
$$\mathbb{P}[(X, Y) \in R] = \iint_R f_{(X,Y)}(x, y)\, dxdy.$$

Le patron d'une fabrique de batteries destinées aux appareils électroniques tels que les GSM, les MP-3, etc... s'intéresse à la longévité de ses produits et décide d'étudier conjointement le nombre maximal (qu'il note X), ainsi que le nombre minimal (qu'il note Y), d'années de fonctionnement de ces derniers. Après bien des calculs, il arrive à la conclusion que la fonction de densité jointe de X et Y est de la forme
$$f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} C(x + 2y) & \text{si } 0 \le x \le 10,\ 0 \le y \le 10 \\ 0 \quad \text{sinon} \end{cases}.$$

(a) Déterminer la constante C pour que la fonction $f_{(X,Y)}$ soit bien une fonction de densité jointe.
(b) Calculer la probabilité qu'une batterie fonctionne au plus 7 ans mais au moins 2 ans.

7. Deux variables aléatoires X et Y, modélisées respectivement par les fonctions de densité f_X et f_Y, sont dites indépendantes lorsque leur fonction de densité jointe vaut le produit de leurs fonctions de densité respectives, c.-à-d.

$$f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x)f_Y(y).$$

En outre, un temps d'attente T est modélisé par une fonction de densité de la forme

$$f_T(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \mu^{-1}e^{\frac{-t}{\mu}} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

où $\mu > 0$ est le temps d'attente moyen.

Le directeur d'un cinéma constate que le temps d'attente moyen pour obtenir un ticket est de 10 minutes, et celui pour obtenir une boisson fraîche de 5 minutes. En supposant que ces temps d'attente sont indépendants, calculer la probabilité qu'un spectateur attende au total moins de 20 minutes avant de prendre place en ayant son ticket et une boisson.

Liste 12 : Mathématiques appliquées (2)

Calcul matriciel

1. Le mouvement d'une particule se déplaçant dans le plan est régi par les équations différentielles suivantes :
$$\left\{\begin{array}{rcl} Dx(t) & = & -4x(t) - 3y(t) + 5t \\ Dy(t) & = & -2x(t) - 5y(t) + 5e^t \end{array}\right. .$$
Déterminer le vecteur position $P(t) = (x(t), y(t))$ de cette particule à tout instant t.

2. Le mouvement d'une particule se déplaçant dans le plan est régi par les équations différentielles suivantes :
$$\left\{\begin{array}{rcl} Dx(t) & = & x(t) + 2y(t) - z(t) \\ Dy(t) & = & 2x(t) + 4y(t) - 2z(t) \\ Dz(t) & = & -x(t) - 2y(t) + z(t) \end{array}\right. .$$
Déterminer le vecteur position $P(t) = (x(t), y(t), z(t))$ de cette particule à tout instant t.

3. Un individu vit dans un milieu où il est susceptible d'attrapper une maladie par piqûre d'insecte. Il peut être dans l'un des trois états suivants : immunisé (I), malade (M), non malade et non immunisé (S). D'un mois à l'autre, son état peut changer selon les règles suivantes :
   - étant immunisé, il peut le rester avec une probabilité $0,9$ ou passer à l'état S avec une probabilité $0,1$;
   - étant dans l'état S, il peut le rester avec une probabilité $0,5$ ou passer à l'état M avec une probabilité $0,1$;
   - étant malade, il peut le rester avec une probabilité $0,2$ ou passer à l'état S avec une probabilité $0,8$.

   Déterminer
   a) la matrice de transition du système ;
   b) la probabilité qu'un individu immunisé soit encore immunisé après deux mois ;
   c) la probabilité qu'à long terme, un individu soit immunisé.

4. Un biologiste étudie le passage d'une molécule de phosphore dans un écosystème. Celle-ci peut se trouver dans le sol, dans l'herbe, dans le bétail ou peut disparaître de l'écosystème. D'une heure à l'autre, le transfert peut s'effectuer selon les modalités suivantes :
   - étant dans le sol, la molécule a 3 chances sur 5 d'y rester, 3 chances sur 10 de passer dans l'herbe et 1 chance sur 10 de disparaître ;
   - étant dans l'herbe, elle a 1 chance sur 10 de revenir dans le sol, 2 chances sur 5 de rester dans l'herbe et 1 chance sur 2 de se retrouver dans le bétail ;
   - étant dans le bétail, elle a 3 chances sur 4 de retourner dans le sol, 1 chance sur 5 de rester dans le bétail et 1 chance sur 20 de disparaître ;
   - si la molécule disparaît, elle ne réapparaît plus nulle part.

   Déterminer la probabilité qu'à long terme, la molécule de phosphore disparaisse de l'écosystème.

5. La cryptographie, pour beaucoup de monde, est un moyen de maintenir des communications privées. En effet, la protection des communications sensibles a été l'objectif principal de la cryptographie dans la grande partie de son histoire. Le *chiffrage* est la transformation des données dans une forme illisible. Son but est d'assurer la sécurité en maintenant l'information cachée aux gens à qui l'information n'est pas adressée, même ceux qui peuvent voir les données chiffrées. Le *déchiffrage* est l'inverse du chiffrage ; c'est la transformation des données chiffrées dans une forme intelligible.
   Aujourd'hui, les gouvernements emploient des méthodes sophistiquées de codage et de décodage des messages. Un type de code, qui est extrêmement difficile à déchiffrer, se sert d'une grande matrice pour coder un message. Le récepteur du message le décode en employant l'inverse de la matrice. Voici un exemple de codage/décodage d'un message par ce procédé.
   Considérons le message

SUIS EN DANGER

ainsi que la matrice de codage

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = C.$$

Pour le codage, on assigne à chaque lettre de l'alphabet un nombre, à savoir simplement sa position dans l'alphabet, c'est-à-dire A correspond à 1, B correspond à 2, ... , Z correspond à 26. En outre, on assigne le nombre 27 à un espace. Ainsi, le message devient :

$$\begin{array}{cccccccccccccc} \text{S} & \text{U} & \text{I} & \text{S} & * & \text{E} & \text{N} & * & \text{D} & \text{A} & \text{N} & \text{G} & \text{E} & \text{R} \\ 19 & 21 & 9 & 19 & 27 & 5 & 14 & 27 & 4 & 1 & 14 & 7 & 5 & 18 \end{array}.$$

Puisqu'on emploie une matrice 2×2, on décompose la forme numérique de ce message en une suite de vecteurs[5] 1×2 :

$$(19 \quad 21),\ (9 \quad 19),\ (27 \quad 5),\ (14 \quad 27),\ (4 \quad 1),\ (14 \quad 7),\ (5 \quad 18).$$

On code alors le message en multipliant chacun de ces vecteurs par la matrice de codage C, ce qui peut être fait en définissant une matrice dont les lignes sont ces vecteurs et en multipliant cette dernière par C, ce qui nous donne :

$$\begin{pmatrix} 19 & 21 \\ 9 & 19 \\ 27 & 5 \\ 14 & 27 \\ 4 & 1 \\ 14 & 7 \\ 5 & 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 25 \\ -10 & 39 \\ 22 & -39 \\ -13 & 53 \\ 3 & -5 \\ 7 & -7 \\ -13 & 44 \end{pmatrix}$$

Dès lors, le message crypté est donné par les lignes de cette dernière matrice que l'on place bout à bout pour la transmission :

$$-2,\ 25,\ -10,\ 39,\ 22,\ -39,\ -13,\ 53,\ 3,\ -5,\ 7,\ -7,\ -13,\ 44.$$

Enfin, pour décoder le message, le récepteur a recours à la même technique que celle employée pour le codage mais en utilisant l'inverse de la matrice de codage, qui est donnée ici par

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Il doit donc calculer le produit

$$\begin{pmatrix} -2 & 25 \\ -10 & 39 \\ 22 & -39 \\ -13 & 53 \\ 3 & -5 \\ 7 & -7 \\ -13 & 44 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 21 \\ 9 & 19 \\ 27 & 5 \\ 14 & 27 \\ 4 & 1 \\ 14 & 7 \\ 5 & 18 \end{pmatrix}$$

et il retrouve bien la matrice correspondant au message de départ, ce qui lui permet de lire le message :

$$\begin{array}{cccccccccccccc} 19 & 21 & 9 & 19 & 27 & 5 & 14 & 27 & 4 & 1 & 14 & 7 & 5 & 18 \\ \text{S} & \text{U} & \text{I} & \text{S} & * & \text{E} & \text{N} & * & \text{D} & \text{A} & \text{N} & \text{G} & \text{E} & \text{R} \end{array}.$$

Le Gouvernement a réussi à intercepter le message crypté suivant, provenant de l'ennemi public n°1 et destiné à l'ennemi public n°2 :

$$-18,\ -21,\ -31,\ 53,\ 48,\ 61,\ 3,\ -15,\ -21,\ -34,\ -30,\ -43,\ 45,\ 42,\ 48.$$

5. Dans le cas où il faut compléter le dernier vecteur, il suffit d'y placer des "27", ce qui revient à compléter le message par des espaces pour avoir un nombre de caractères qui soit multiple de la dimension de la matrice de codage.

L'un de ses meilleurs espions infiltrés, James Blond, a découvert que la matrice utilisée par l'ennemi pour coder ce message est la suivante :

$$\begin{pmatrix} -3 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Malheureusement, il n'y connaît rien en calcul matriciel et personne ne peut déchiffrer ce message... Votre mission est de décoder ce message dans les plus bref délais.

Approximations polynomiales

La vitesse v d'une vague est liée à sa longueur d'onde λ et à la profondeur h de l'eau (exprimées en mètres) par l'expression

$$v^2 = \frac{g\lambda}{2\pi}\,\mathrm{th}\left(\frac{2\pi h}{\lambda}\right),$$

où g est la constante de gravitation.

– Sachant que th : $x \mapsto \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$, déterminer l'approximation polynomiale à l'ordre 1 en 0 de cette fonction.

– Grâce à cette approximation, en sachant que la vague qui a ravagé le Japon l'an dernier avait une longueur d'onde de 5 km, à combien peut-on estimer la vitesse du tsunami lors de son arrivée près des côtes (on suppose alors que la profondeur de l'eau est de 2 m) ?