

Année 2011-2012

# Cours d'Analyse Mathématique II

---

F. BASTIN

---

Prise de notes rédigée par

Alice SALMON.

---

Avec la participation de :

Nicolas GHAYE (schémas)

Sandy ASSENT (relecture)

# Préface

## Avertissement

Ce texte résulte d'une mise en forme de notes prises au cours durant l'année académique 2006-2007. Ces notes ont ensuite été mises à jour pour correspondre à l'année 2007-2008<sup>1</sup>. L'essentiel de la matière s'y trouve donc en structure. Cependant, comme il s'agit de notes « prises en direct », le texte ne reprend pas toutes les nuances, toutes les précisions, toutes les explications, tous les exemples et références signalés à l'occasion du cours oral (et éventuellement des séances de questions-réponses et aux répétitions). Il ne constitue pas ce que l'on peut appeler « un syllabus » de cours, mais plutôt un support qu'il convient de compléter de façon personnelle en suivant le cours et en cherchant les compléments d'informations nécessaires.

Il convient aussi de bien faire attention à la diversité des notations qui peut apparaître en fonction des divers enseignants et syllabi. On citera pour références de base :

- EK : KREYSZIG, Erwin, *Advanced engineering mathematics*, 9<sup>e</sup> édition : Wiley International Editions, 2006.
- ED : DELHEZ, Eric, *Analyse*, Centrale des cours de l'A.E.E.S., 2006.
- <http://www.afo.ulg.ac.be/> , site sur lequel il ne faut pas oublier de récupérer les fichiers pdf.

Il est également important de remarquer que ces notes sont le fruit du travail des années académiques 2006-2007 et 2007-2008 et que des ajouts/suppressions seront sans doute apportés à l'avenir.

Dans cet ordre d'idée, il est aussi important de noter que des compléments sont déjà disponibles sur le site internet.

## Conseils

Les démonstrations qui sont dans ces notes sont « insuffisantes » dans le sens où restituées telles quelles lors de l'examen, elles ne rencontrent pas complètement les attentes de M<sup>me</sup> BASTIN.

## Remerciements

Je tiens particulièrement à remercier M<sup>me</sup> BASTIN qui m'a encouragée à publier ces notes de cours afin d'aider les étudiants.

Elle m'a permis d'y apporter quelques modifications utiles pour la compréhension de tous.

---

<sup>1</sup>Si vous retrouvez des erreurs ou des fautes de frappe vous pouvez en faire part à L. F. Bastin

# Introduction

Le cours est divisé en trois parties principales : *Analyse vectorielle*, *Fonctions holomorphes d'une variable complexe*, *Introduction à l'analyse de Fourier*. Ces trois parties installent et/ou précisent des concepts d'analyse mathématique (Analyse II) tout à fait classiques et abondamment utilisés dans tout cursus d'études scientifiques d'ingénieur.

## Analyse vectorielle

L'analyse vectorielle traite de vecteurs qui dépendent de variables, c'est-à-dire de fonctions à valeurs vectorielles. On peut donc leur appliquer à la fois des opérations algébriques (produit scalaire, produit vectoriel) et des opérations relevant de l'analyse (dérivation, intégration). Cette notion est fondamentale car elle permet de modéliser des grandeurs que l'on souhaite décrire en chaque point et dont on souhaite éventuellement étudier l'évolution au cours du temps (champ magnétique, électrique, gravifique, ...). Les fonctions vectorielles (resp. scalaires) sont dans ce cas plutôt appelées « champs vectoriels (resp. scalaires) » et il importe de s'assurer que les notions introduites sont indépendantes des coordonnées servant à les modéliser.

La modélisation et l'étude des phénomènes, des situations concrètes, passent ainsi par des égalités, des équations, faisant intervenir des champs, leurs dérivées, des intégrales (le long de chemins, sur des surfaces). Une bonne connaissance des définitions et résultats mathématiques faisant intervenir ces diverses notions est donc fondamentale pour aller de l'avant dans les applications.

C'est la raison pour laquelle sont présentés dans le cadre de ce cours les opérateurs gradient, divergence, rotationnel, leurs propriétés fondamentales ainsi que plusieurs résultats (comme le théorème de Stokes<sup>2</sup>) les faisant intervenir dans des intégrales de surface et curvilignes.

## Fonctions d'une variable complexe ; fonctions holomorphes

La théorie des fonctions de variables complexes se distingue de celle des variables réelles. Bien sûr, un complexe peut être vu comme un couple de réels (c'est même sa définition) : une fonction de  $n$  variables complexes peut donc être vue comme une fonction de  $2n$  variables réelles. Cependant, la richesse des opérations que l'on introduit au sein de l'ensemble des complexes, leur signification géométrique, en font « un monde à part », bien plus « complexe » que « le cas réel ». Des résultats assez surprenants (pour l'intuition) apparaissent ; leur interprétation directe est parfois difficile, cela même par leur nature pleinement géométrique dès le départ.

Pourtant, l'intervention de la « complexification » de grandeurs physiques (penser à la théorie du potentiel par exemple) permet de « simplifier » leur étude, car elle autorise l'utilisation de

---

<sup>2</sup>qui représente en fait un des piliers sur lequel pourrait se baser une grande partie de la théorie si on l'abordait sous un autre angle.

résultats puissants relatifs à la théorie des fonctions de variables complexes, holomorphes en particulier.

En guise de brève « entrée en matière » (il ne s'agit pas ici de reproduire la table des matières précise de cette partie), disons simplement qu'une fonction holomorphe est une fonction d'une variable complexe, à valeurs complexes, qui est « dérivable au sens complexe » :

$$\lim_{h \rightarrow 0, h \in \mathbb{C}} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \in \mathbb{C}.$$

Cette simple propriété est en fait équivalente (sous de faibles hypothèses) au fait que  $f$  vérifie l'équation de Cauchy-Riemann (intimement liée à l'équation de Laplace)

$$D_x f + i D_y f = 0$$

ou encore que son intégrale (curviligne) le long d'une courbe fermée qui se déforme sur un point est nulle

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) dz = \int_{\mathcal{C}} f(z) dx + i \int_{\mathcal{C}} f(z) dy = 0$$

ou encore qu'elle se développe localement en série de puissances (Taylor). Bien sûr, ceci ne prendra tout son sens et sa force que lorsque les conditions précises de validité seront installées. Néanmoins, ces différentes expressions d'une même notion (définition) laissent entrevoir déjà la richesse des propriétés de ces fonctions.

Notons encore que le terme « fonction analytique complexe » est parfois utilisé à la place de « fonction holomorphe ».

## Une introduction à l'analyse de Fourier

La théorie de Fourier est présente dans tellement de domaines et d'applications qu'une liste exhaustive est impossible à réaliser ; en bref, disons simplement que son intervention en analyse du signal est absolument fondamentale et que pour en faire une bonne utilisation (puisqu'elle est supposée modéliser des phénomènes précis) il s'agit d'en connaître la définition mathématique, de même que les propriétés fondamentales.

Dans le cadre de ce cours, on se contentera d'une brève introduction, soutenue par l'installation d'un cadre mathématique rigoureux et permettant déjà d'entrevoir l'ampleur des applications.

Cette partie consistera ainsi simplement à introduire la notion de transformation de Fourier d'une fonction intégrable et celle de série trigonométrique de Fourier.

Il est vrai que le cadre naturel de modélisation de diverses notions physiques utilise plutôt le cadre des fonctions de carré intégrable ( $L^2(\mathbb{R}^n)$ ). Cependant, l'étude de celles-ci et de leur transformée de Fourier, nécessite un bagage mathématique relativement conséquent. Par ailleurs, la plupart des propriétés se déduisent (à l'aide d'outils mathématiques non disponibles à ce stade) de celles de la transformée des fonctions intégrables. Ces transformées s'expriment directement sous la forme d'intégrales (ce qui n'est pas le cas des transformées dans  $L^2$  qui demandent un recours à une limite), une bonne connaissance de la théorie de l'intégration et de certains résultats d'analyse de base suffisent à en asseoir une introduction solide, susceptible d'être immédiatement utilisée et rapidement rentabilisée (dans des cours un peu plus avancés).

Dans le même esprit, l'espace tout à fait général  $L^2(A)$  (où  $A$  n'est plus l'espace tout entier) joue aussi un rôle considérable, notamment par le fait que c'est un espace de Hilbert et que la notion de base orthonormée et de décomposition dans une base orthonormée y est exploitable,

ouvrant grand la porte à toute une série d'applications (théorie spectrale, analyse numérique et résolution d'équations différentielles ou aux dérivées partielles, analyse du signal, ...) Dans le cadre de ce cours, nous nous contenterons d'étudier le cas des espaces  $L^2([a, b])$ , où  $a, b$  sont des réels. Ces espaces jouent un rôle fondamental en analyse du signal, permettant notamment de décomposer un signal périodique en une série faisant simplement intervenir une somme de sinus et de cosinus (de même période) et dans laquelle les coefficients correspondent (en un sens à préciser) aux différentes fréquences.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Rappels</b>	<b>9</b>
1.1	Notations . . . . .	9
1.2	Dérivabilité, continuité, cas des fonctions d'une variable ou de plusieurs variables réelles . . . . .	9
1.2.1	Définition de la continuité . . . . .	9
1.2.2	Définition de la dérivabilité . . . . .	10
1.2.3	Définition d'une fonction continûment dérivable . . . . .	10
1.2.4	Dérivation des fonctions composées . . . . .	11
1.3	Intégration (Lebesgue) à une ou plusieurs variables . . . . .	12
1.3.1	Définitions et propriété générales . . . . .	12
1.3.2	Les critères de la convergence majorée (Lebesgue) et monotone (Levi) . . . . .	13
1.3.3	Critères pratiques d'intégrabilité ( $n = 1$ ) . . . . .	14
1.3.4	Techniques d'intégration à une variable . . . . .	15
1.3.5	Intégration à plusieurs variables et permutation de l'ordre . . . . .	16
1.3.6	Intégration par changement de variables . . . . .	17
1.3.7	Le théorème des intégrales paramétriques . . . . .	18
1.3.8	Les intégrales fléchées . . . . .	20
<b>2</b>	<b>Analyse vectorielle</b>	<b>21</b>
2.1	Notions fondamentales (considérées vues) . . . . .	21
2.1.1	Notations . . . . .	21
2.2	Fonctions vectorielles, champs vectoriels . . . . .	22
2.2.1	Notion de dérivation . . . . .	23
2.2.2	Exemples courants de fonctions vectorielles . . . . .	24
2.3	Opérateurs vectoriels . . . . .	24
2.3.1	Le gradient . . . . .	24
2.3.2	La divergence . . . . .	25
2.3.3	Le rotationnel . . . . .	25
2.4	Relations importantes entre les opérateurs vectoriels . . . . .	26
2.4.1	Théorèmes de primitivation : Réciproque 1 . . . . .	27
2.4.2	Théorèmes de primitivation : Réciproque 2 . . . . .	30
2.4.3	Théorème de primitivation 3 : dans le cas de la divergence . . . . .	30
2.5	Courbes, surfaces et intégrales associées . . . . .	31
2.5.1	Définitions et rappels . . . . .	31
2.5.2	Longueur d'une courbe et aire d'une surface . . . . .	35
2.5.3	Intégrale sur un chemin (une courbe) . . . . .	35
2.5.4	Intégrale curviligne, le long d'un chemin . . . . .	36

2.5.5	Intégrale sur une surface . . . . .	36
2.5.6	Intégrale superficielle, le long d'une surface . . . . .	37
2.5.7	Notion d'orientation et d'invariance des intégrales . . . . .	37
2.6	Formules . . . . .	39
2.6.1	Formule de Green dans le plan . . . . .	39
2.6.2	Formule de Gauss ou Théorème de la divergence . . . . .	41
2.6.3	Formule de Stokes . . . . .	42
2.7	L'indépendance des intégrales . . . . .	44
2.7.1	Homotopie de chemins . . . . .	44
2.8	Champ exact . . . . .	46
<b>3</b>	<b>Fonctions holomorphes</b> . . . . .	<b>49</b>
3.1	Introduction et notations . . . . .	49
3.1.1	Un cas particulier d'intégrales curvilignes . . . . .	49
3.1.2	Premières propriétés . . . . .	50
3.2	Définition d'une fonction holomorphe . . . . .	50
3.2.1	Propriétés directes mais fondamentales . . . . .	51
3.2.2	Remarques au sujet de l'équation de Cauchy-Riemann . . . . .	52
3.3	Propriétés relatives aux intégrales des fonctions holomorphes . . . . .	52
3.4	Propriétés de type général relatives aux fonctions holomorphes . . . . .	53
3.5	Quelques exemples d'intégrales dans ce cadre . . . . .	53
3.6	Primitives dans le cadre des fonctions holomorphes . . . . .	53
3.7	Fonctions holomorphes élémentaires . . . . .	54
3.7.1	Le logarithme complexe . . . . .	54
3.7.2	Définition de la puissance généralisée . . . . .	56
3.8	Formule intégrale de Cauchy . . . . .	56
3.8.1	Preuve . . . . .	56
3.8.2	Conséquences de la formule d'intégration de Cauchy . . . . .	58
3.9	Séries de puissances, séries de Taylor . . . . .	60
3.9.1	Définition . . . . .	60
3.9.2	Rayon de convergence, disque de convergence d'une série de puissances . . . . .	61
3.9.3	Développement de fonctions holomorphes en séries de puissances . . . . .	62
3.9.4	Zéros des fonctions holomorphes . . . . .	63
3.10	Théorème des résidus . . . . .	64
3.10.1	Séries de Laurent . . . . .	64
3.10.2	Remarques . . . . .	65
3.10.3	Démonstration du théorème de Laurent . . . . .	66
3.10.4	Pôles et singularité essentielles . . . . .	69
3.10.5	Théorème des résidus . . . . .	71
3.11	Résultats complémentaires . . . . .	75
3.11.1	« Encoches » . . . . .	75
3.11.2	Lemme de Jordan . . . . .	76
3.11.3	Application dans les intégrales fléchées . . . . .	76
3.11.4	Transformation de Laplace . . . . .	77
3.11.5	Application dans un cas particulier . . . . .	78
3.11.6	Transformation conforme . . . . .	81

<b>4</b>	<b>Introduction à l'analyse de Fourier</b>	<b>82</b>
4.1	La transformée de Fourier dans $\mathbb{L}^1(\mathbb{R}^n)$	82
4.2	Théorème sur les Transformées de Fourier dans $\mathbb{L}^1$	83
4.2.1	Propriétés générales	84
4.2.2	Propriété de transfert	85
4.3	Théorème de Fourier	86
4.4	Espace vectoriel complexe, normé, de Hilbert	86
4.4.1	Propriétés d'un espace vectoriel complexe de Hilbert	87
4.4.2	$\mathbb{L}^2$	88
4.5	Développement en série trigonométrique de Fourier	91
4.5.1	Exemples	92



# Chapitre 1

## Rappels

### Références du chapitre

#### Théorie

- Cours de premier bac ingénieur (les parties de ce cours parsèmeront ce chapitre avec des remarques).
- Dans le EK (livre de références) : paragraphes 9.6, 10.3, 9.1, 9.2, 9.3.

#### Exercices

- Exercices du EK (se trouvant à la fin des sections et à la fin du chapitre).
- Liste(s) d'exercices disponible(s) sur le site du service : <http://www.afo.ulg.ac.be/>

### 1.1 Notations

- Une fonction est une loi mathématique, elle est désignée par une lettre par exemple :  $f$ ,  $g$ ,  
...
- La valeur de la fonction en un point est quant à elle désignée par  $f(x)$ ,  $g(x, y)$ ,  $\phi(x, y, z)$ ,  
...

### 1.2 Dérivabilité, continuité, cas des fonctions d'une variable ou de plusieurs variables réelles

Remarque : Attention aux différents comportements selon que  $f$  est définie sur une partie de  $\mathbb{R}$  ou une partie de  $\mathbb{R}^n$ ,  $n > 1$

$$f : A \rightarrow \mathbb{R} \quad (\text{ou } \mathbb{C})$$

$$A \subset \mathbb{R}^n$$

$A$  est supposé ouvert<sup>1</sup> quand on parle de dérivée.

#### 1.2.1 Définition de la continuité

$f$  est continu en  $x_0 \in A$  si  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .

<sup>1</sup>Un ensemble ouvert (ou simplement un ouvert) de  $\mathbb{R}^n$  est un ensemble  $\Omega$  de points de  $\mathbb{R}^n$  tel que tout point de  $\Omega$  possède un voisinage (une boule ouverte) entièrement compris dans  $\Omega$ .

## 1.2.2 Définition de la dérivabilité

Pour  $n=1$

$f$  est dérivable en  $x_0 \in A$  si  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$  existe et est finie.

Notation :  $Df(x_0)$  est la dérivée de la fonction  $f$  en  $x_0$ .

NB : Si  $f$  est dérivable en  $x_0$  alors  $f$  est continu en  $x_0$  :

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) \\ \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left[ \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) \right] = 0 \end{aligned}$$

car  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = Df(x_0) \in \mathbb{C}$  ( $f$  est dérivable en  $x_0$ ) et le produit d'un nombre par  $0 = \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)$  vaut toujours 0.

Pour  $n > 1$

Mettons-nous dans le cas où  $n = 2$  :

$f : A \rightarrow \mathbb{R}$  (ou  $\mathbb{C}$ )

$A \subset \mathbb{R}^2$  est un ouvert du plan.

On dit que  $f$  est dérivable par rapport à sa première variable (resp. seconde variable) au point  $(x_0, y_0) \in A$  lorsque  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$  existe et est finie (resp. lorsque  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0+h) - f(x_0, y_0)}{h}$  existe et est finie). Dans ces cas, les limites sont appelées dérivées partielles et on dit que  $f$  est dérivable en  $(x_0, y_0)$ .

Notations :  $D_x f(x_0, y_0)$  ou  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ .

Remarque : Une fonction à plusieurs variables dérivable en un point n'y est pas forcément continue.

Exemple :

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \rightarrow \begin{cases} = 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \\ = \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \end{cases}$$

est dérivable sur  $\mathbb{R}^2$  mais n'est pas continue en  $(0, 0)$ .

NB : une fonction peut être continue sans pour autant être dérivable.

Remarque : Lorsque  $n > 1$  et que la fonction  $f$  est dérivable en un point en ses deux variables et que ses dérivées sont continues, alors la fonction est continue en ce point.

## 1.2.3 Définition d'une fonction continûment dérivable

$f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$  est continûment dérivable dans  $A$  si ses dérivées partielles existent en tout point de  $A$  et si celles-ci sont des fonctions continues sur  $A$ .

## 1.2.4 Dérivation des fonctions composées

Remarque :

- $f(g)$  ou  $f(g_1, \dots, g_J)$  avec  $J > 1$  sont deux cas ayant des hypothèses différentes pour la dérivation des fonctions composées. Pour  $J > 1$  on doit supposer  $f$  continûment dérivable.
- Lorsque l'on parle de dérivation on travaille toujours avec des ouverts.
- $g$  et les  $g_j$  sont définies dans une partie de  $\mathbb{R}^n$  et à valeurs réelles (dans ce chapitre on ne parle pas de fonctions définies sur une partie de  $\mathbb{C}^n$ ).

### J=1

Si  $g$  est dérivable dans  $\Omega \subset \mathbb{R}$  si  $f$  est dérivable dans  $I \subset \mathbb{R}$  et si  $\{g(x) : x \in \Omega\} \subset I$  alors  $f(g)$  est dérivable dans  $\Omega$  et

$$\underbrace{Df(g(x))}_F = (Df)(g(x)) \cdot Dg(x) \quad x \in \Omega$$

### J>1 (et exemple de $n = 2$ )

Soit  $f$  une fonction de deux variables  $x$  et  $y$ , continûment dérivable ; soient  $f_1$  et  $f_2$  deux autres fonctions de deux variables  $x'$  et  $y'$ , dérivables. On définit la fonction composée  $F$  par

$$F(x', y') = f(f_1(x', y'), f_2(x', y'))$$

et on a (analogue pour la dérivée partielle par rapport à la seconde variable)

$$\begin{aligned} D_{x'} F(x', y') &= (D_x f)(f_1(x', y'), f_2(x', y')) \cdot D_{x'} f_1(x', y') \\ &+ (D_y f)(f_1(x', y'), f_2(x', y')) \cdot D_{x'} f_2(x', y') \end{aligned}$$

avec les relations naturelles habituelles entre les ouverts où les fonctions sont dérivables.

### Notion de dérivée totale

Soit  $f(x, y, z) : x = x(t); y = y(t); z = z(t)$

les dérivées par rapport à  $t$  sont notées :  $\dot{x} = Dx(t) \quad \dot{y} = Dy(t) \quad \dot{z} = Dz(t)$

On pose :

$$F(t) = f(x(t), y(t), z(t))$$

Par le théorème de dérivation des fonctions composées (avec les hypothèses habituelles)

$$DF(t) = (D_x f)_{(x(t), y(t), z(t))} \cdot Dx(t) + (D_y f)_{(x(t), y(t), z(t))} \cdot Dy(t) + (D_z f)_{(x(t), y(t), z(t))} \cdot Dz(t)$$

En notation abrégée :

$$DF(t) = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \dot{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \dot{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \dot{z}$$

## Dérivée directionnelle

On cherche à définir la dérivée de la fonction  $f$  dans la direction de  $\vec{h}$  au point  $(x_0, y_0, z_0)$ . On procède comme suit :

Soit  $\vec{h} = [h_1, h_2, h_3]$  ( $\vec{h} \neq \vec{0}$ ) et  $\vec{h}^* = \frac{\vec{h}}{\|\vec{h}\|}$

$$\begin{aligned}x(t) &= x_0 + t.h_1^* \\y(t) &= y_0 + t.h_2^* \\z(t) &= z_0 + t.h_3^*\end{aligned}$$

Par le théorème des fonction composées :

$$\begin{aligned}DF(0) = DF(t)|_{t=0} &= [Df(x_0 + t.h_1^*, y_0 + t.h_2^*, z_0 + t.h_3^*)]|_{t=0} \\&= D_1f(x_0, y_0, z_0).h_1^* + D_2f(x_0, y_0, z_0).h_2^* + D_3f(x_0, y_0, z_0).h_3^*\end{aligned}$$

On introduit le vecteur des dérivées partielles – le gradient – :

$$\mathbf{grad} f = \vec{\nabla} f = [D_1f(x_0, y_0, z_0), D_2f(x_0, y_0, z_0), D_3f(x_0, y_0, z_0)]$$

On a la dérivée de  $f$  dans la direction de  $\vec{h}$  au point  $(x_0, y_0, z_0)$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\vec{OP}_0 + t.\vec{h}^*) - f(\vec{OP}_0)}{t} = DF(0) = \vec{\nabla} f(x_0, y_0, z_0) \bullet \frac{\vec{h}}{\|\vec{h}\|}$$

## 1.3 Intégration (Lebesgue) à une ou plusieurs variables

### 1.3.1 Définitions et propriété générales

Nous adoptons le point de vue de l'intégration de *Lebesgue* dans  $\mathbb{R}^n$  (ou dans un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ), basé sur la notion de mesure  $\mu$  de Lebesgue des semi-intervalles dans  $\mathbb{R}^n$  (ou plus généralement dans un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ )

$$\mu(I) = \prod_{j=1}^n (b_j - a_j)$$

si  $I = ]a_1, b_1] \times \dots \times ]a_n, b_n]$  (avec  $a_j, b_j \in \mathbb{R}$  et  $a_j < b_j$  pour tout  $j$ ) et sur la notion d'intégrale des fonctions étagées<sup>2</sup>

$$f = \sum_{l=1}^L c_l \chi_{I_l}, \quad \int f d\mu = \sum_{l=1}^L c_l \mu(I_l).$$

C'est à partir de ces notions, de celle de  $\mu$ -mesurabilité et de celle de  $\mu$ -négligeabilité qu'est définie la notion de fonction intégrable et d'intégrale d'une fonction intégrable.

Comme il a été convenu de privilégier la notion de mesure de Lebesgue (sauf mention du contraire) par rapport à toute autre mesure, c'est la notation «  $dx, dy, \dots$  » qui sera utilisée en « raccourci » de la notation générale  $d\mu(x), d\mu(y)$  faisant appel à une mesure générale  $\mu$ .

Cela étant, rappelons que la définition de l'intégrale de Lebesgue permet de retrouver ce que l'on appelle dans ce contexte *l'interprétation de Riemann de l'intégrale*<sup>3</sup> :

<sup>2</sup>Pour rappel, une fonction étagée est une combinaison linéaire de fonctions caractéristiques de semi-intervalles.

<sup>3</sup>dans une autre présentation de la théorie, c'est cette notion qui peut être introduite en premier lieu ; cette présentation, plus directe au début, est cependant beaucoup moins aisée à manipuler dans la suite, notamment dans les théorèmes généraux relatifs à l'intégration et dans la définition de l'intégrabilité et des intégrales à plusieurs variables.

## Interprétation de Riemann de l'intégrale

Si  $f$  est une fonction continue sur le compact  $K$  de  $\mathbb{R}^n$  alors

$$\int_K f(x) dx = \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{l=1}^{L_m} f(x_{l,m}) \text{mes}(X_{l,m})$$

- où, pour tout  $m \in \mathbb{N}$ ,  $L_m$  désigne un naturel strictement positif ou  $+\infty$
- où, pour tout  $m \in \mathbb{N}$  encore,  $K$  est l'union disjointe des ensembles mesurables  $X_{l,m}$  ( $l = 1, \dots, L_m$ ), avec  $\lim_{m \rightarrow +\infty} \sup_{1 \leq l \leq L_m} \text{diam}(X_{l,m}) = 0$
- où, pour tous  $l, m$ , on a  $x_{l,m} \in X_{l,m}$
- où  $\text{mes}(X_{l,m}) = \int \chi_{X_{l,m}}(x) dx$ .

### Remarques :

1. Dans  $\mathbb{R}$ , pour  $K = [a, b]$  et des partitions de  $[a, b]$  en découpages dont la largeur tend vers 0, on retrouve bien l'interprétation du fait que, dans le cas où  $f$  est positif, cette intégrale est la limite de certaines sommes de surfaces de rectangles modélisant « l'aire sous la courbe représentative de  $f$  ».
2. Signalons aussi que l'on dit que  $f$  est intégrable sur une partie mesurable  $A$  de  $\mathbb{R}^n$  si  $f\chi_A$  est intégrable sur  $\mathbb{R}^n$ . L'ensemble des fonctions intégrables sur  $A$  est noté  $L^1(A)$ .

### 1.3.2 Les critères de la convergence majorée (Lebesgue) et monotone (Levi)

#### Convergence monotone

Si la suite  $f_m$  ( $m \in \mathbb{N}$ ) de fonctions intégrables et réelles sur  $\mathbb{R}^n$  est croissante presque partout (resp. décroissante presque partout) et si la suite numérique  $\int_{\mathbb{R}^n} f_m(x) dx$  ( $m \in \mathbb{N}$ ) est majorée (resp. minorée), alors

- la suite  $f_m$  converge presque partout (notons  $f$  sa limite)
- cette limite est une fonction intégrable sur  $\mathbb{R}^n$
- la suite  $f_m$  converge vers  $f$  dans  $L^1(\mathbb{R}^n)$ , ce qui signifie que la suite numérique

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f_m(x) - f(x)| dx \quad (m \in \mathbb{N})$$

converge vers 0. En particulier, on a  $\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_m(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx$ .

## Convergence majorée

Si la suite  $f_m$  de fonctions mesurables sur  $\mathbb{R}^n$  converge presque partout sur  $\mathbb{R}^n$  vers  $f$  et s'il existe une fonction intégrable  $F$  telle que  $|f_m| \leq F$  presque partout pour tout  $m$ , alors

- $f$  est intégrable sur  $\mathbb{R}^n$
- la suite  $f_m$  converge vers  $f$  dans  $L^1(\mathbb{R}^n)$ , ce qui signifie que la suite numérique

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f_m(x) - f(x)| dx \quad (m \in \mathbb{N})$$

converge vers 0. En particulier, on a  $\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_m(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx$ .

### 1.3.3 Critères pratiques d'intégrabilité ( $n = 1$ )

Par définition, une fonction définie presque partout sur  $]a, b[ \subset \mathbb{R}$  (intervalle non nécessairement borné) est intégrable en  $a^+$  s'il existe un réel  $a' \in ]a, b[$  tel que  $f$  soit intégrable sur  $]a, a'[$ . De même,  $f$  est intégrable en  $b^-$  s'il existe un réel  $b' \in ]a, b[$  tel que  $f$  soit intégrable sur  $]b', b[$ . De la sorte, lorsque  $f$  est continu sur  $]a, b[$ , son intégrabilité sur  $]a, b[$  est équivalente à son intégrabilité en  $a^+$  et en  $b^-$ .

Citons tout d'abord deux cas très utiles où il est aisé de vérifier l'intégrabilité d'une fonction continue  $f$  sur  $]a, b[$  :

1. si  $F$  est intégrable sur  $]a, b[$  et si  $|f| \leq F$  presque partout sur  $]a, b[$  alors  $f$  est intégrable sur  $]a, b[$ ;
2. si  $a$  est réel et si  $f$  admet une limite finie en  $a^+$ , alors  $f$  est intégrable en  $a^+$ ; de même en  $b^-$ .

De même, on obtient aisément le résultat suivant :

3. si  $f$  est une fonction mesurable, réelle et de signe constant sur  $]a, b[$  et si elle est intégrable sur tout intervalle du type  $]a', b[$  ( $a' \in ]a, b[$ ) alors  $f$  est intégrable sur  $]a, b[$  si et seulement s'il existe une suite décroissante  $a_m$  ( $m \in \mathbb{N}$ ) de l'intervalle  $]a, b[$  qui tend vers  $a$  telle que la suite  $\int_{a_m}^b f(x) dx$  ( $m \in \mathbb{N}$ ) converge vers une limite finie.

Remarque : un résultat analogue peut être obtenu en  $b^-$ , avec une suite croissante  $b_m$  ( $m \in \mathbb{N}$ ) de l'intervalle  $]a, b[$ .

NB : la proposition (3) est notamment utilisée si  $f$  est continu sur l'intervalle  $]a, b[$  et intégrable en  $b^-$ ,

Les critères pratiques d'intégrabilité suivants sont basés sur le premier résultat rappelé ci-dessus et sur l'intégrabilité de<sup>4</sup>  $x \mapsto \frac{1}{x^s}$  en  $0^+$  ou en  $+\infty$ .

<sup>4</sup>rappelons que cette fonction est intégrable en  $0^+$  si et seulement si  $s < 1$  et est intégrable en  $+\infty$  si et

## Critères pratiques d'intégrabilité

Soit  $f$  une fonction continue sur  $]a, b[$ .

– Si  $a \in \mathbb{R}$ , alors  $f$  est intégrable en  $a^+$  s'il existe  $s < 1$  tel que

$$\lim_{x \rightarrow a^+} (x - a)^s |f(x)| \quad \text{existe et est fini.}$$

– Si  $a = -\infty$ , alors  $f$  est intégrable en  $-\infty$  s'il existe  $s > 1$  tel que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^s |f(x)| \quad \text{existe et est fini.}$$

– Si  $b \in \mathbb{R}$ , alors  $f$  est intégrable en  $b^-$  s'il existe  $s < 1$  tel que

$$\lim_{x \rightarrow b^-} (b - x)^s |f(x)| \quad \text{existe et est fini.}$$

– Si  $b = +\infty$ , alors  $f$  est intégrable en  $+\infty$  s'il existe  $s > 1$  tel que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^s |f(x)| \quad \text{existe et est fini.}$$

## Critères pratiques de non-intégrabilité

De même, on obtient des critères de non-intégrabilité sur  $]a, b[$  : si  $f \in C_0(]a, b[)$ , alors  $f$  n'est pas intégrable sur cet intervalle dans les cas suivants :

–

$$a \in \mathbb{R} \quad \& \quad \lim_{x \rightarrow a^+} (x - a)f(x) \text{ existe et diffère de } 0$$

–

$$a = -\infty \quad \& \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} |x|f(x) \text{ existe et diffère de } 0$$

–

$$b \in \mathbb{R} \quad \& \quad \lim_{x \rightarrow b^-} (b - x)f(x) \text{ existe et diffère de } 0$$

–

$$b = +\infty \quad \& \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x) \text{ existe et diffère de } 0$$

### 1.3.4 Techniques d'intégration à une variable

Voir le cours de premier bachelier. Pour rappel les méthodes principales sont :

- par parties
- par variation de primitive
- par changement de variable

---

seulement si  $s > 1$  ; ce résultat est aisément démontré en utilisant (3)

### 1.3.5 Intégration à plusieurs variables et permutation de l'ordre

#### Les théorèmes de Tonelli et Fubini ( $n > 1$ )

On pose  $n = n' + n''$ , avec  $n', n'' \in \mathbb{N}_0$

##### Théorème de Fubini

Pour toute fonction  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$

- pour presque tout  $x'' \in \mathbb{R}^{n''}$ , la fonction  $x' \mapsto f(x', x'')$  est intégrable sur  $\mathbb{R}^{n'}$
- la fonction  $x'' \mapsto \int_{\mathbb{R}^{n'}} f(x', x'') dx'$  est intégrable sur  $\mathbb{R}^{n''}$
- on a

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^{n''}} \left( \int_{\mathbb{R}^{n'}} f(x', x'') dx' \right) dx''$$

L'hypothèse d'intégrabilité de  $f$  sur  $\mathbb{R}^n$  est souvent obtenue au moyen du théorème suivant<sup>5</sup>.

##### Théorème de Tonelli

Soit  $f$  une fonction mesurable sur  $\mathbb{R}^n$ . Si  $x' \mapsto |f(x', x'')|$  est intégrable sur  $\mathbb{R}^{n'}$  pour presque tout  $x'' \in \mathbb{R}^{n''}$  et si  $x'' \mapsto \int_{\mathbb{R}^{n'}} |f(x', x'')| dx'$  est intégrable sur  $\mathbb{R}^{n''}$ , alors  $f$  est intégrable sur  $\mathbb{R}^n$ .

Remarque : Le cas de l'intégration sur  $\mathbb{R}^n$  est un cas particulier, on peut bien entendu réduire l'intégration sur un ensemble  $A \subset \mathbb{R}^n$ .

#### Exemples

1. Soient deux fonctions  $g_1, g_2$ , continues sur  $[a, b]$

$$A = \{(x, y) : x \in [a, b] \& g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

on a alors,

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy$$

2. Calculer l'aire de l'ensemble suivant de deux manières différentes

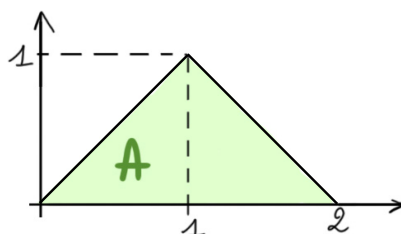


FIG. 1.1 – Représentation de l'ensemble A

<sup>5</sup>Remarque que, dans le cours de premier bachelier, ce théorème était appelé *Critère de Tonelli*.



### 1.3.6 Intégration par changement de variables

#### A deux variables

Si  $f$  est intégrable sur  $\Omega$  alors

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \iint_{\Omega'} f(g_1(x', y'), g_2(x', y')) |\det J(x', y')| dx' dy'$$

Avec le changement de variables entre les ouverts  $\Omega$  et  $\Omega'$  (supposé au moins  $C_1$ ) :

$$\begin{cases} x = g_1(x', y') \\ y = g_2(x', y') \end{cases}$$

où

$$|\det J(x', y')| = \left| \begin{vmatrix} D_{x'} g_1 & D_{x'} g_2 \\ D_{y'} g_1 & D_{y'} g_2 \end{vmatrix} \right|$$

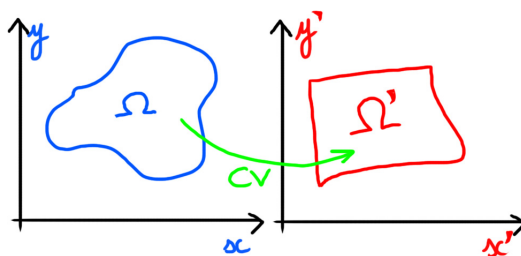


FIG. 1.2 – Changement de variables

#### Cas des coordonnées polaires

$\theta \in [0, 2\pi[$ ,  $r > 0$ . On portera une attention particulière à la notion de bijectivité et de dérivabilité.

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

$$|\det J| = r$$

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \iint_{A'} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r \cdot d\theta dr$$

#### Cas des coordonnées sphériques

$\varphi \in [0, 2\pi[$ ,  $\theta \in [0, \pi]$ ,  $r > 0$ . On portera une attention particulière à la notion de bijectivité et de dérivabilité.

$$x = r \sin \theta \cos \varphi$$

$$y = r \sin \theta \sin \varphi$$

$$z = r \cos \theta$$

$$|\det J| = r^2 \sin \theta$$

$$\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{A'} f(r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta) \cdot r^2 \sin \theta \cdot d\theta dr d\varphi$$

### 1.3.7 Le théorème des intégrales paramétriques

Une version fréquente du théorème des intégrales paramétriques se présente comme suit.

On suppose que  $f$  est une fonction de  $n + p$  variables réelles  $((x, \lambda) \mapsto f(x, \lambda))$  avec  $\lambda \in \Omega =$  ouvert de  $\mathbb{R}^p$  et  $x \in A =$  partie mesurable de  $\mathbb{R}^n$ . Ici, la variable  $x$  va jouer le rôle de variable d'intégration et la variable  $\lambda$  celui de paramètre (notons que l'on utilise aussi souvent la notation  $f_\lambda(x)$ ). On souhaite en fait considérer la fonction

$$I : \lambda \mapsto \int_A f(x, \lambda) dx$$

et la dériver « sous le signe » :

$$D_\lambda^\alpha I(\lambda) = \int_A D_\lambda^\alpha f(x, \lambda) dx.$$

(Signalons que cela peut se révéler délicat car il s'agit en fait de la permutation de deux limites.) Pour être en mesure d'affirmer que ce résultat est correct, il y a bien sûr des hypothèses naturelles, comme la dérivabilité de  $f$  par rapport à  $\lambda$  et l'intégrabilité en  $x$  des dérivées par rapport à  $\lambda$ . En plus, pour s'assurer de l'égalité des deux membres, on utilise une hypothèse du style « convergence majorée ».

#### Théorème des intégrales paramétriques, version $n = p = 1$

Lorsque le paramètre et la variable d'intégration sont réels ( $n = p = 1$ ), le résultat s'énonce comme suit.

Soient  $\Lambda$  un ouvert de  $\mathbb{R}$  (ensemble de variation du paramètre  $\lambda$ ) et  $A \subset \mathbb{R}$  un sous-ensemble mesurable de  $\mathbb{R}$  (ensemble d'intégration).

Si

1. pour presque tout  $x \in A$ ,  $\lambda \rightarrow f_\lambda(x)$  est une fonction continûment dérivable dans  $\Lambda$
2.  $\forall \lambda \in \Lambda$ ,  $f_\lambda$  et  $D_\lambda f_\lambda$  sont intégrables sur  $A$
3.  $\forall K$  compact inclus dans  $\Lambda$ ,  $\exists F \in \mathbb{L}_1(A)$  tel que  $|D_\lambda f_\lambda| \leq F(x)$  pp. sur  $A \quad \forall \lambda \in K$ .

alors la fonction est continûment dérivable sur  $\Lambda$  et on a

$$D_\lambda \int_A f_\lambda(x) dx = \int_A D_\lambda f_\lambda(x) dx$$

*Remarque* L'application de ce théorème se fait très facilement dans le cas où  $A$  est un compact et où  $f(x)$ ,  $D_\lambda f(x)$  sont continues en  $(x, \lambda)$ .

#### Application

Si  $a > 0$ ,  $b \in \mathbb{R}$ , alors

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax^2} \cos bx dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{b^2}{4a}}$$

*Sens de l'intégrale :*

L'intégrale a un sens, car la fonction est continue en  $0^+$  et que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-ax^2} = 0$  si  $a > 0$ .

Résolution :

Utilisation des intégrales paramétriques :  $\Lambda = \mathbb{R}$

$A =$  ensemble d'intégration  $= [0, +\infty[$

On fixe  $a > 0$  et on pose :  $f_b(x) = e^{-ax^2} \cos bx$

1.  $\forall x > 0 \quad b \rightarrow f_b(x)$  est  $C_1$  sur  $\Lambda$
2.  $\forall b \in \mathbb{R} \quad f_b \in \mathbb{L}_1([0, +\infty[)$  et  $D_b f_b \in \mathbb{L}^1([0, +\infty[)$
3. Soit  $K$  un compact  $\subset \mathbb{R}$ , on a

$$\begin{aligned} |D_b f_b| &= |-x \sin bx| e^{-ax^2} \\ &= x e^{-ax^2} |\sin bx| \\ &\leq x e^{-ax^2} \in \mathbb{L}^1(A) \end{aligned}$$

Ainsi  $b \rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-ax^2} \cos bx \, dx = F(b)$  est continûment dérivable sur  $\mathbb{R}$  et

$$D_b F(b) = D_b \int_0^{+\infty} e^{-ax^2} \cos bx \, dx = \int_0^{+\infty} e^{-ax^2} D_b \cos bx \, dx$$

$$D_b F(b) = - \int_0^{+\infty} e^{-ax^2} x \sin bx \, dx$$

On obtient aussi :

$$\begin{aligned} D_b(e^{\frac{b^2}{4a}} \cdot F(b)) &= D_b e^{\frac{b^2}{4a}} \cdot F(b) + e^{\frac{b^2}{4a}} \cdot D_b F(b) \\ &= \left[ \frac{b}{2a} \cdot F(b) - \int_0^{+\infty} x \cdot e^{-ax^2} \sin bx \, dx \right] \cdot e^{\frac{b^2}{4a}} \\ &= 0 \quad \forall b \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Car

$$\int_0^{+\infty} x \cdot e^{-ax^2} \sin bx \, dx$$

Par une intégration par parties, on obtient :

$$= \underbrace{\left[ \frac{-1}{2a} e^{-ax^2} \sin(bx) \right]_0^{+\infty}}_{=0} + \frac{b}{2a} \underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-ax^2} \cos bx \, dx}_{F(b)}$$

Dès lors,  $\exists r \in \mathbb{R}$  tel que  $e^{\frac{b^2}{4a}} \cdot F(b) = r \quad \forall b \in \mathbb{R}$

Pour  $b = 0$  on a

$$r = e^0 \cdot F(0) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

( $F(0)$  est l'intégrale de Poisson). D'où la conclusion.

## Théorème des intégrales paramétriques

Soit  $f$  une fonction de  $n + p$  variables réelles  $((x, \lambda) \mapsto f(x, \lambda))$  avec  $\lambda \in \Omega =$  ouvert de  $\mathbb{R}^p$  et  $x \in A =$  partie mesurable de  $\mathbb{R}^n$ . On suppose que

1. pour presque tout  $x \in A$ , la fonction  $\lambda \mapsto f(x, \lambda)$  est de classe  $C_L$  dans  $\Omega$ ,
2. pour tout multi-indice  $\alpha$  de longueur strictement inférieure à  $L$ , la fonction  $x \mapsto D_\lambda^\alpha f(x, \lambda)$  est intégrable sur  $A$ ,
3. pour tout multi-indice  $\alpha$  de longueur  $L$  et pour tout compact  $K$  de  $\mathbb{R}^p$  inclus dans  $\Omega$ , il existe une fonction intégrable  $F_{\alpha, K}$  sur  $A$  telle que

$$\sup_{\lambda \in K} |D_\lambda^\alpha f(x, \lambda)| \leq F_{\alpha, K}(x) \quad \text{presque partout sur } A$$

Dans ces conditions, la fonction  $I : \lambda \mapsto \int_A f(x, \lambda) dx$  est de classe  $C_L$  dans  $\Omega$  et

$$D_\lambda^\alpha I(\lambda) = \int_A D_\lambda^\alpha f(x, \lambda) dx$$

pour tout multi-indice  $\alpha$  dont la longueur ne dépasse pas  $L$ .

### Remarques :

- Un cas très pratique est celui-ci : les hypothèses sont vérifiées lorsque  $A$  est un compact, que  $f$  est de classe  $C_L$  par rapport à  $\lambda$  et que les dérivées sont continues dans  $A \times \Omega$ .
- Ce résultat sera notamment utilisé (avec  $n = 1$  et  $p = 2$ ) dans le chapitre concernant les fonctions holomorphes.

### 1.3.8 Les intégrales fléchées

Soit  $f \in C_0(]a, b])$ . Vu la définition de l'intégrabilité, il se peut que  $f$  ne soit pas intégrable en  $a^+$  mais que la limite  $\lim_{a' \rightarrow a^+} \int_{a'}^b f(x) dx$  existe et soit finie<sup>6</sup>. Dans ces conditions, on dit que  $f$  admet une intégrale fléchée en  $a^+$  et on appelle intégrale fléchée de  $f$  sur  $]a, b[$  la limite ci-dessus. On écrit

$$\int_{a^+}^b f(x) dx = \lim_{a' \rightarrow a^+} \int_{a'}^b f(x) dx.$$

De même, si  $f$  est continu sur  $[a, b[$ , il se peut que  $f$  ne soit pas intégrable en  $b^-$  mais que  $\lim_{b' \rightarrow b^-} \int_a^{b'} f(x) dx$  existe et soit fini. On définit l'intégrale fléchée de  $f$  en  $b^-$  de manière analogue

$$\int_a^{b^-} f(x) dx = \lim_{b' \rightarrow b^-} \int_a^{b'} f(x) dx.$$

<sup>6</sup>Une autre description de cette situation est la suivante :  $\lim_{a' \rightarrow a^+} \int_{a'}^b |f(x)| dx = +\infty$  et  $\lim_{a' \rightarrow a^+} \int_{a'}^b f(x) dx \in \mathbb{C}$

# Chapitre 2

## Analyse vectorielle

### Références du chapitre - Partie I

#### Théorie

- Dans le EK (livre de référence) : paragraphes 9.4, 9.5, 9.7, 9.8, 9.9.
- le cours (compléments importants au livre)

#### Exercices

- Exercices du EK (se trouvant à la fin des sections et à la fin du chapitre).
- Liste(s) d'exercices disponible(s) sur le site du service : <http://www.afo.ulg.ac.be/>

### 2.1 Notions fondamentales (considérées vues)

- addition de deux vecteurs et multiplication d'un vecteur par un scalaire
- produit scalaire de 2 vecteurs et produit vectoriel de 2 vecteurs
- notion de base (du plan, de l'espace) et de composantes d'un vecteur dans une base
- notion de projection orthogonale (sur une droite vectorielle ou sur un plan vectoriel) et expressions pratiques pour les déterminer
- diverses expressions analytiques : longueur d'un vecteur (norme), produit scalaire de deux vecteurs, produit vectoriel de 2 vecteurs.

#### 2.1.1 Notations

Les vecteurs s'écrivent :  $\vec{v}$  ou  $\mathbf{v}$  ou  $\underline{v}$

Les composantes – réelles dans cette partie du cours – sont notées entre crochets :

$$\vec{v} = [v_1, v_2, v_3] = v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2 + v_3\vec{e}_3$$

Les coordonnées d'un point sont notées entre parenthèses  $(x_1, x_2, x_3)$ .

Le produit scalaire :  $\vec{a} \bullet \vec{b}$

Le produit vectoriel :  $\vec{a} \times \vec{b}$  ou  $\vec{a} \wedge \vec{b}$

## 2.2 Fonctions vectorielles, champs vectoriels

### Champ scalaire

$$f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad (\text{ou } \mathbb{C})$$

Exemple La distance entre deux points est un champ scalaire :

$$f(P) = \text{dist}(P_0; P) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$$

où  $(x, y, z)$  sont les coordonnées de  $P$  et  $(x_0, y_0, z_0)$  sont les coordonnées de  $P_0$ , un point fixé.

Représentation On prend l'habitude de représenter un champ scalaire par des surfaces équipotentielles (ou des courbes de niveau).

### Champ vectoriel

$$\vec{f} : A \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (n = 2, 3 \text{ et } m = 1, 2, 3)$$

Exemple : A tout instant  $t$  fixé, la vitesse de rotation d'un corps de l'espace autour d'un axe donne un exemple de champ vectoriel.

$$\begin{aligned} \vec{\omega} &= \omega \vec{e}_3 \\ \vec{f}(x, y, z) &= \vec{v}(x, y, z) \\ &= \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OP} = \omega \vec{e}_3 \wedge (x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3) \\ &= \omega(-y\vec{e}_1 + x\vec{e}_2) \\ &= \omega[-y, x, 0] \end{aligned}$$

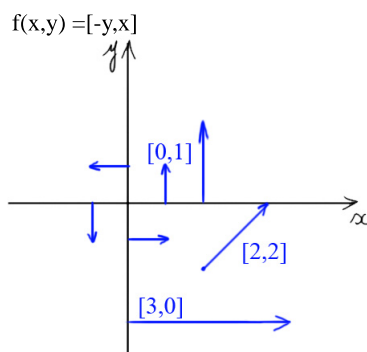


FIG. 2.1 – Représentation du champ  $\vec{f} = [-y, x]$  dans le plan du mouvement (vue du dessus)

Remarque : Il faut bien remarquer qu'au vu des conventions, on a

$\vec{f}(x, y, z) = [f_1(x, y, z), f_2(x, y, z), f_3(x, y, z)]$  où  $f_1, f_2, f_3$  sont des champs scalaires.

Différence entre un champ vectoriel (resp. scalaire) et une fonction vectorielle (resp. scalaire)

Un champ vectoriel est une application définie en tout point de l'espace (ou du plan). C'est donc une loi qui dépend des points ( $\approx$  champ physique). En pratique, on se sert des coordonnées des points et/ou des composantes des vecteurs pour transformer les champs vectoriels en fonctions vectorielles, i.e. des lois définies sur un ensemble de  $(x, y, z)$  (ou plus si on travaille dans  $\mathbb{R}^n$ ). Et il faut donc normalement étudier l'indépendance de ces lois vis-à-vis du système d'axes (ou de la base) employés si on veut être certain que les propriétés trouvées ne dépendent que du point, et non de la base/repère choisis.

Un champ vectoriel peut donc être interprété comme une « entité physique » et la fonction vectorielle comme « le modèle mathématique » qui exprime cette entité physique. À partir du moment où la fonction vectorielle ne dépend pas du système d'axes, on l'appelle champ vectoriel sans distinction.

Des exemples de démonstration de l'indépendance d'une fonction vectorielle (en particulier les opérateurs vectoriels) par rapport à un système d'axes se trouvent dans la section 9.9 Annexe 4 du EK.

### 2.2.1 Notion de dérivation

Les fonctions **vectorielles** sont en fait des fonctions d'une ou plusieurs variables réelles à valeur dans  $\mathbb{R}^n$  avec  $n = 2, 3$ . Dès lors on applique la notion de dérivée et de dérivée partielle à des composantes de  $\vec{f}$  (dans le cas d'un champ vectoriel).

Par exemple, si  $\vec{f}(x, y, z) = [f_1(x, y, z), f_2(x, y, z), f_3(x, y, z)]$ , la dérivée selon x est :

$$D_x \vec{f} = [D_x f_1(x, y, z), D_x f_2(x, y, z), D_x f_3(x, y, z)]$$

Ou encore :  $\vec{f}(t) = [f_1(t), f_2(t), f_3(t)]$  dont la dérivée donne simplement

$$D\vec{f}(t) = [Df_1(t), Df_2(t), Df_3(t)]$$

### Dérivées de produits

Dans le cas de la dérivée d'un produit d'une fonction scalaire et d'une fonction vectorielle :

$$\begin{aligned} D(\alpha(t) \cdot \vec{f}(t)) &= [\alpha' f_1 + \alpha f_1', \alpha' f_2 + \alpha f_2', \alpha' f_3 + \alpha f_3'] \\ &= [\alpha' f_1, \alpha' f_2, \alpha' f_3] + [\alpha f_1', \alpha f_2', \alpha f_3'] \\ &= D\alpha \cdot \vec{f} + \alpha \cdot D\vec{f} \end{aligned}$$

Tous les cas de produits vectoriels, produits scalaires se font selon la règle de dérivation des produits et peuvent être retrouvés par le même genre de développement que ci-dessus.

Produit vectoriel

$$D(\vec{g}(t) \wedge \vec{f}(t)) = D\vec{g} \wedge \vec{f} + \vec{g} \wedge D\vec{f}$$

En particulier, si  $\vec{f}$  est constant, on a

$$D(\vec{g}(t) \wedge \vec{f}(t)) = D\vec{g} \wedge \vec{f}$$

### Produit scalaire

$$D(\vec{g}(t) \bullet \vec{f}(t)) = D\vec{g} \bullet \vec{f} + \vec{g} \bullet D\vec{f}$$

En particulier, si  $\vec{f}$  est constant, on a

$$D(\vec{g}(t) \bullet \vec{f}(t)) = D\vec{g} \bullet \vec{f}$$

### 2.2.2 Exemples courants de fonctions vectorielles

Les fonctions vectorielles les plus utilisées sont les « chemins » et les « couvertures ». Ces fonctions consistent en un paramétrage respectivement de courbes et de surfaces.

La section 2.5 vous permettra de découvrir ces exemples particuliers.

## 2.3 Opérateurs vectoriels

### 2.3.1 Le gradient

Soit un champ scalaire  $f : \Omega \xrightarrow{C_1} \mathbb{R}$  ( $\Omega$  ouvert de  $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}^3$ ).

Le gradient de  $f$  est le champ vectoriel :

$$\begin{aligned}(x, y, z) \mapsto \mathbf{grad} f = \vec{\nabla} f &= [D_x f(x, y, z), D_y f(x, y, z), D_z f(x, y, z)] \\ &= D_x f(x, y, z)\vec{e}_1 + D_y f(x, y, z)\vec{e}_2 + D_z f(x, y, z)\vec{e}_3\end{aligned}$$

où  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  désigne une base orthonormée de l'espace  $\mathbb{R}^3$ .

Le gradient est donc un opérateur qui transforme un champ scalaire en un champ vectoriel.

NB : Le gradient d'un champ scalaire est une fonction vectorielle indépendante de la base orthonormée de l'espace dans lequel il est exprimé (voir EK p405 - Théorème 1), le gradient est donc un champ vectoriel.

#### Remarques

- La dérivée directionnelle de  $f$  dans la direction de  $\vec{h}$  au point  $(x_0, y_0, z_0)$  est  $\vec{\nabla} f(x_0, y_0, z_0) \bullet \frac{\vec{h}}{\|\vec{h}\|}$  (c.f. rappels).
- Soit une surface  $\mathcal{S}$  d'équation cartésienne  $f(x, y, z) = 0$ . Pour un point  $(x_0, y_0, z_0)$ <sup>1</sup> par lequel passe une courbe qui est incluse dans la surface, on a  $\forall t$  voisin de  $t_0$

$$F(t) = f(x(t), y(t), z(t)) = 0$$

donc

$$0 = DF(t_0) = \vec{\nabla} f(x_0, y_0, z_0) \bullet [\dot{x}(t_0), \dot{y}(t_0), \dot{z}(t_0)]$$

Le gradient est donc orthogonal à la surface.

Exemples : Déterminer le gradient des fonctions scalaires données explicitement par  $f(x, y, z) = x.e^y + z$  et  $f(x, y, z) = \frac{1}{r}$  où  $r = \text{dist}(O, P(x, y, z))$ .

<sup>1</sup>Avec  $x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0, z(t_0) = z_0$



### 2.3.2 La divergence

Soit un champ vectoriel  $\vec{f} \in \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  ( $\Omega$  ouvert  $\subset \mathbb{R}^n$ )

La divergence de  $\vec{f} = [f_1, f_2, f_3]$  est le champ scalaire :

$$(x, y, z) \mapsto \operatorname{div} \vec{f} = D_x f_1 + D_y f_2 + D_z f_3 = \vec{\nabla} \bullet \vec{f}$$

Remarques :

- $\operatorname{div} \vec{f} = \vec{\nabla} \bullet \vec{f}$ . Cette dernière égalité indique en fait une notation et n'est pas le produit scalaire de deux vecteurs. Cependant, vu la définition, on peut faire "comme si" c'était le produit scalaire de  $f$  et du "vecteur gradient".
- La divergence représente par exemple le rapport entre le flux entrant et sortant d'une membrane.
- Calcul de la divergence de  $\vec{v}(x, y, z) = [3xy, 2xy, -yz^2]$  on a :  $\operatorname{div} \vec{v} = 3y + 2x - 2yz$ .
- La divergence est un opérateur qui transforme un champ vectoriel en un champ scalaire.
- La divergence d'un champ vectoriel est une fonction scalaire indépendante du système d'axes dans lequel elle est calculée (voir EK p 411), c'est pour cela que cette fonction scalaire porte le nom de champ scalaire.

### 2.3.3 Le rotationnel

Soit un champ vectoriel  $\vec{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  ( $\Omega$  ouvert  $\subset \mathbb{R}^3$ )

Le rotationnel de  $\vec{f}$  est le champ vectoriel :

$$\operatorname{rot} \vec{f}(x, y, z) = \vec{\nabla} \wedge \vec{f} = (D_y f_3 - D_z f_2) \vec{e}_1 + (D_z f_1 - D_x f_3) \vec{e}_2 + (D_x f_2 - D_y f_1) \vec{e}_3$$

Remarques :

- Le rotationnel est un opérateur qui transforme un champ vectoriel en un champ vectoriel.
- Par exemple : le rotationnel est un vecteur parallèle à l'axe de rotation et de module égal à la vitesse angulaire de rotation. Il décrit donc la manière dont un corps tourne autour d'un axe.
- $\vec{v}(x, y, z) = [xy, 3zx, z]$  a pour rotationnel :  $\operatorname{rot} \vec{v} = -3x \vec{e}_1 + (3z - x) \vec{e}_3$
- Si vous avez un champ à valeurs dans  $\mathbb{R}^2$  et dont vous voulez connaître le rotationnel dans  $\mathbb{R}^3$ , vous considérez simplement que la dernière composante de  $\vec{f}$  est nulle.
- A un point de l'espace représenté par ses coordonnées, le rotationnel associe un vecteur dont la longueur et la direction sont indépendantes du système d'axes dans lequel les coordonnées sont considérées (voir EK p416) ; c'est donc un champ vectoriel.

## 2.4 Relations importantes entre les opérateurs vectoriels

1. Si  $\alpha : \Omega \xrightarrow{C_2} \mathbb{R}$ , alors

$$\mathbf{rot}(\vec{\nabla}\alpha) = \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla}\alpha = \vec{0} \text{ dans } \Omega$$

*Preuve*

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}\alpha &= [\underbrace{D_x\alpha}_{f_1}, \underbrace{D_y\alpha}_{f_2}, \underbrace{D_z\alpha}_{f_3}] \\ \mathbf{rot}\vec{\nabla}\alpha &= [D_y D_z \alpha - D_z D_y \alpha, D_z D_x \alpha - D_x D_z \alpha, D_x D_y \alpha - D_y D_x \alpha] \\ &= \vec{0} \text{ car nous avons supposé } \alpha \text{ de classe } C_2 \end{aligned}$$

2. Si  $\vec{f} : \Omega \xrightarrow{C_2} \mathbb{R}^3$ , alors

$$\mathbf{div}(\mathbf{rot}\vec{f}) = \vec{\nabla} \bullet (\vec{\nabla} \wedge \vec{f}) = 0 \text{ dans } \Omega$$

*Preuve*

La preuve de cette propriété peut être obtenue par un raisonnement similaire à celui fait ci-dessus.

### Théorèmes de primitivation

Nous avons deux relations qui sont toujours vraies pour un ouvert  $\Omega$  quelconque, est-il possible de leur trouver une réciproque ?

$$\begin{aligned} \text{Si } \mathbf{rot}\vec{f} = \vec{0} &\implies \exists? \alpha \text{ tel que } \mathbf{grad}\alpha = \vec{\nabla}\alpha = \vec{f} \\ \text{Si } \mathbf{div}\vec{b} = 0 &\implies \exists? \vec{f} \text{ tel que } \mathbf{rot}\vec{f} = \vec{\nabla} \wedge \vec{f} = \vec{b} \end{aligned}$$

Parfois mais pas toujours !!

*Remarque : L'utilisation de ces résultats :*

Il est important de savoir quand un champ vectoriel dérive d'un potentiel : les intégrales faisant intervenir ces divers éléments représentent/modélisent des situations concrètes.

On revient plus loin sur le cas d'un champ vectoriel dérivant d'un potentiel scalaire dans le cadre des intégrales curvilignes et des fonctions holomorphes.

### 2.4.1 Théorèmes de primitivation : Réciproque 1

**Exemple montrant qu'il n'existe pas toujours une fonction convenant :**

Soit  $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}$  et la fonction de classe  $C_\infty$

$$f = \left[ \underbrace{\frac{-y}{x^2 + y^2}}_{f_1}, \underbrace{\frac{x}{x^2 + y^2}}_{f_2}, 0 \right]$$

on a bien le rotationnel de ce champ nul :

$$\begin{aligned} \mathbf{rot} \vec{f} &= \left[ 0, 0, D_x \left( \frac{x}{x^2 + y^2} \right) - D_y \left( \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) \right] \\ &= \left[ 0, 0, \frac{(x^2 + y^2) - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{-(x^2 + y^2) + 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right] \\ &= \vec{0} \quad \forall (x, y, z) \in \Omega \end{aligned}$$

Par l'absurde, supposons qu'il existe une fonction scalaire

$$\alpha : \Omega \xrightarrow{C_1} \mathbb{R} \text{ telle que } \mathbf{grad} \alpha = \vec{f} \text{ dans } \Omega \Leftrightarrow [D\alpha_1, D\alpha_2, D\alpha_3] = [f_1, f_2, f_3]$$

Définissons  $F(\theta) = \alpha(\cos \theta, \sin \theta, 0)$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$ . On calcule la dérivée de la fonction  $F$  par le théorème de dérivation des fonctions composées.

$$\begin{aligned} D_\theta F(\theta) = D_\theta \alpha(\cos \theta, \sin \theta, 0) &= D_\theta \alpha_1(\cos \theta, \sin \theta, 0) \cdot (-\sin \theta) + D_\theta \alpha_2(\cos \theta, \sin \theta, 0) \cdot \cos \theta \\ &= f_1(\cos \theta, \sin \theta, 0) \cdot (-\sin \theta) + f_2(\cos \theta, \sin \theta, 0) \cdot \cos \theta \\ &= \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} + \frac{\cos^2 \theta}{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} \\ &= 1 \quad \forall \theta \in [0, 2\pi] \end{aligned}$$

D'autre part on a aussi :

$$I = \int_0^{2\pi} D_\theta F d\theta = F(2\pi) - F(0) = \alpha(1, 0, 0) - \alpha(1, 0, 0) = 0$$

Mais nous avons trouvé que la dérivée de  $F$  valait 1 en supposant qu'  $\alpha$  répondait à la question, donc on obtient aussi

$$I = \int_0^{2\pi} 1 d\theta = 2\pi$$

Ce qui conduit à un absurdité. Il n'existe donc pas de fonction scalaire  $\alpha : \Omega \xrightarrow{C_1} \mathbb{R}$  telle que  $\mathbf{grad} \alpha = \vec{f}$  dans  $\Omega$

**Sous quelles hypothèses la propriété est-elle correcte ?**

Un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$  est dit étoilé par rapport à un point  $x_0 (\in \Omega)$  si

$$\forall x \in \Omega, \text{ le segment } \{(1-t)x_0 + tx : t \in [0, 1]\} \text{ est inclus dans } \Omega$$

Quelques remarques : notez la différence entre un ouvert étoilé et un connexe ou un convexe.

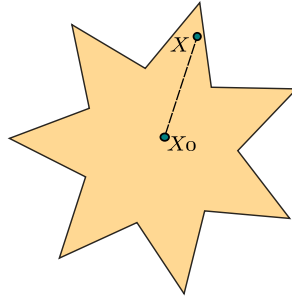


FIG. 2.2 – Ouvert étoilé

- étoilé  $\Rightarrow$  connexe, connexe  $\not\Rightarrow$  étoilé.
- étoilé  $\not\Rightarrow$  convexe, convexe  $\Rightarrow$  étoilé.
- convexe  $\Rightarrow$  connexe, connexe  $\not\Rightarrow$  convexe.

Théorème

Soit  $\Omega$  un ouvert étoilé par rapport à  $x_0$  et soient  $f_1, \dots, f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C_1$ .  
 Alors il existe  $\alpha \in C_2(\Omega)$  tel que  $D_{x_j}\alpha = f_j, \forall j \Leftrightarrow$  les  $f_j$  vérifient les égalités croisées, à savoir

$$D_{x_j}f_k = D_{x_k}f_j \quad \forall j, k = 1, \dots, n$$

Dans  $\mathbb{R}^3$ , la condition sur les dérivées s'écrit :

$$D_1f_2 = D_2f_1 \text{ et } D_1f_3 = D_3f_1 \text{ et } D_2f_3 = D_3f_2$$

c'est-à-dire  $\mathbf{rot} \vec{f} = \vec{0}$ .

Ainsi, en bref, dans un ouvert étoilé  $\mathbf{rot} \vec{f} = \vec{0} \Leftrightarrow \exists \alpha : \vec{f} = \mathbf{grad} \alpha = \vec{\nabla} \alpha$

Remarque : Cette propriété se généralise à d'autres types d'ouverts : **les ouverts simplement connexes**.

Par définition, un ouvert est dit simplement connexe lorsque tout chemin fermé peut se déformer continûment sur un point, la déformation se faisant dans l'ouvert (c.f. plus loin : on dit que le chemin est homotope à un chemin constant).

**Démonstration**

$\Rightarrow$  est évident car si vous avez un champ  $f$  de classe  $C_1$  tel que les composantes de  $f$  soient les dérivées partielles d'un même champ scalaire, alors :

$$D_{x_j}f_k = D_j D_k \alpha = D_{x_k}f_j$$

car  $\alpha$  est de classe  $C_2$ .

⇐ supposons que l'ouvert soit étoilé par rapport à l'origine. On pose<sup>2</sup> :

$$\alpha(x_1, \dots, x_n) = \int_0^1 \vec{x} \bullet \vec{f}(tx_1, \dots, tx_n) dt$$

où  $\vec{x} = [x_1, \dots, x_n]$

L'intégrale est définie car on sait que les points  $(tx_1, \dots, tx_n)$ ,  $t \in [0, 1]$  appartiennent à l'ouvert ( $\Omega$  est étoilé).

On a ici une application d'un cas des intégrales paramétriques pour le calcul des  $D_{x_j}$ .

$$\int_0^1 \vec{x} \bullet \vec{f}(tx_1, \dots, tx_n) dt = \int_0^1 \sum_{r=1}^n x_r f_r(\underbrace{tx_1, \dots, tx_n}_{\in \Omega}) dt$$

Les intégrales paramétriques s'appliquent très facilement ici car  $\vec{f}$  est  $C_1$  et que l'on se trouve sur un compact !

$$\begin{aligned} D_{x_j} \alpha &\stackrel{1}{=} \int_0^1 D_{x_j} \left( \sum_{r=1}^n x_r f_r(tx_1, \dots, tx_n) \right) dt \\ &\stackrel{2}{=} \int_0^1 \sum_{r=1}^n D_{x_j} (x_r f_r(tx_1, \dots, tx_n)) dt \\ &\stackrel{3}{=} \int_0^1 \left[ \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq j}}^n x_r t (D_j f_r)(tx_1, \dots, tx_n) + f_j(tx_1, \dots, tx_n) + tx_j (D_j f_j)(tx_1, \dots, tx_n) \right] dt \\ &\stackrel{4}{=} \int_0^1 \left[ \underbrace{\sum_{r=1}^n x_r t \overbrace{(D_j f_r)}^{D_r f_j}(tx_1, \dots, tx_n)}_{t \cdot D_t (f_j(tx_1, \dots, tx_n))} + f_j(tx_1, \dots, tx_n) \right] dt \\ &\stackrel{5}{=} \int_0^1 D_t (t f_j(tx_1, \dots, tx_n)) dt \\ &\stackrel{6}{=} f_j(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

1. Passage de la dérivée sous le signe d'intégration par le théorème des intégrales paramétriques.
2. La dérivée d'une somme (finie) est égale à la somme des dérivées.
3. Dérivation d'un produit
4. Recombinaison de la somme.
5. Egalité des dérivées croisées (hypothèse).
6. Calcul de l'intégrale par variation de primitive.

---

<sup>2</sup>Ceci peut être interprété de la manière suivante :  $\alpha$  est un potentiel = l'intégration du champ  $\vec{f}$  le long du segment joignant l'origine à  $x$ .

On peut généraliser ce résultat à d'autres types d'ouverts.

Voir la transition entre les chapitres 2 et 3

*Remarque :* Comme tout point d'un ouvert  $\Omega$  est le centre d'un ouvert étoilé (par exemple une boule) qui est inclus dans  $\Omega$ , on peut déduire du résultat précédent la propriété suivante : si  $f$  est de classe  $C_1$  dans un ouvert, alors  $f$  dérive **localement** d'un potentiel si et seulement si ses composantes vérifient les égalités des dérivées croisées. Plus précisément :

Soient  $f_1, \dots, f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C_1$ , alors les  $f_j$  vérifient les égalités croisées  $\Leftrightarrow \forall x_0 \in \Omega$ , il existe un voisinage de  $\omega_0$  de  $x_0$  et  $\alpha_0 \in C_2(\omega_0)$  tel que  $D_j \alpha_0 = f_j \forall j$ .

### 2.4.2 Théorèmes de primitivation : Réciproque 2

Si  $\vec{f} : \Omega \xrightarrow{C_2} \mathbb{R}^3$ , alors  $\text{div}(\mathbf{rot} \vec{f}) = \nabla \bullet (\nabla \wedge \vec{f}) = 0$  dans  $\Omega$ .

La réciproque s'écrit : si  $\text{div} \vec{b} = 0$ , alors  $\exists \vec{f}$  tel que  $\vec{b} = \mathbf{rot} \vec{f}$ . Mais cette relation n'est pas toujours vraie.

La réciproque est vraie si  $\Omega$  est un ouvert étoilé.

Soit  $\Omega$  un ouvert étoilé par rapport à  $x_0$  et soit  $\vec{b} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  de classe  $C_1$ , alors

$$\exists \vec{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ tel que } \vec{b} = \mathbf{rot} \vec{f} \Leftrightarrow \text{div} \vec{b} = 0$$

#### Preuve

$\Rightarrow$  ok

$\Leftarrow$  Supposons l'ouvert étoilé en l'origine ( $x_0 = 0$ ), on pose

$$\vec{f}(x, y, z) = \int_0^1 \vec{b}(tx, ty, tz) \wedge \vec{x} \cdot t dt$$

où  $\vec{x} = [x, y, z]$

Ensuite, on vérifie que  $\vec{f}$  est  $C_2$  par les intégrales paramétriques et donc  $\vec{b} = \mathbf{rot} \vec{f}$  dans  $\Omega$ .

### 2.4.3 Théorème de primitivation 3 : dans le cas de la divergence

On montre que

$$\forall \Omega \subset \mathbb{R}^3, \forall \alpha : \Omega \xrightarrow{C_1} \mathbb{R}$$

$$\exists \vec{a} : \Omega \xrightarrow{C_2} \mathbb{R}^3 \text{ tel que } \text{div} \vec{a} = \alpha$$

## Références du chapitre - Partie II

### Théorie

- Dans le EK chapitre 10, paragraphes 10.1, 10.2, 10.4, 10.5, 10.6, 10.7, 10.8, 10.9.
- le cours

### Exercices

- Liste(s) d'exercices disponible(s) sur le site du service : <http://www.afo.ulg.ac.be/>

## 2.5 Courbes, surfaces et intégrales associées

### 2.5.1 Définitions et rappels

Nous nous plaçons dans  $\mathbb{R}^3$ , la notion de courbe ou de surface plane apparaîtra comme un cas particulier.

#### Définition d'une courbe

Un courbe de l'espace est un ensemble de points dont les coordonnées cartésiennes peuvent être définies par trois fonctions scalaires d'une variable réelle.

$$\mathcal{C} = \{P(x, y, z) : x = x(t), y = y(t), z = z(t), t \in I \subset \mathbb{R}\}$$

le paramétrage est :  $\overrightarrow{OP} = \vec{\gamma}(t) = [x(t), y(t), z(t)]$

Définition équivalente : On peut aussi définir une courbe de manière équivalente grâce à une fonction vectorielle :

Une courbe de l'espace est un ensemble de points décrit à l'aide d'une fonction d'une variable réelle à valeurs vectorielles. Cette fonction est appelée paramétrage ou chemin et est la plupart du temps définie sur un intervalle (ou une union d'intervalles).

$$\begin{aligned} \vec{\gamma} : I \subset \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 & t &\mapsto \vec{\gamma}(t) = [\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t)] && \text{(chemin)} \\ \mathcal{C} = \{P(x, y, z) : x = \gamma_1(t), y = \gamma_2(t), z = \gamma_3(t), t \in I\} && && && \text{(courbe)} \end{aligned}$$

#### Remarques

- Une courbe est un ensemble de points. Il y a bien sûr plusieurs paramétrages pour une même courbe.
- Bien souvent, il est sous-entendu qu'un chemin est une fonction continue; la notion de régularité est celle de la dérivabilité (y compris sur un intervalle fermé). On utilisera souvent des chemins de classe  $C_1$  par morceaux<sup>3</sup>.

#### Définition d'une surface

Une surface est un ensemble de points décrit à l'aide d'un paramétrage (souvent supposé régulier) qui dépend de 2 variables réelles.

<sup>3</sup>cela signifie que  $\vec{\gamma}$  est continu sur  $I$ , que  $I$  peut s'écrire sous la forme d'une union finie d'intervalles telle que la restriction de  $\vec{\gamma}$  à chacun des intervalles de cette union soit de classe  $C_1$ .

$$\mathcal{S} = \{P(x, y, z) : \overrightarrow{OP} = \vec{\phi}(u, v); (u, v) \in K \subset \mathbb{R}^2\}$$

### Remarques

- Une surface est un ensemble de points. Il y a bien sûr plusieurs paramétrages pour une même surface.
- Un paramétrage d'une surface est souvent appelé couverture.

## Paramétrages, régularité et orientation

### Courbes

Il est évident qu'une même courbe peut être représentée par plusieurs paramétrages. Afin de définir les notions d'orientation, de vecteur tangent unitaire, d'intégrales sur des courbes en utilisant des paramétrages, il est donc indispensable de ne travailler qu'avec une famille de paramétrages autorisant des définitions intrinsèques.

Pour de nombreuses applications, il suffira de travailler avec des chemins rectifiables (et injectifs).

Le chemin  $\vec{\gamma}$  défini sur  $[a, b]$  est dit rectifiable si l'ensemble

$$\left\{ \sum_{j=1}^J \|\vec{\gamma}(a_j) - \vec{\gamma}(a_{j-1})\| : a_0, \dots, a_J \text{ découpage de } [a, b] \right\}$$

est borné.

Dans ce cas, sa borne supérieure est appelée *longueur* de  $\vec{\gamma}$  et est notée  $L_{\vec{\gamma}}$ .

Signalons l'exemple fondamental suivant : si  $\vec{\gamma}$  est de classe  $C_1$  par morceaux, alors il est rectifiable et injectif (sauf aux extrémités dans le cas de chemins fermés<sup>4</sup>).

Rappelons qu'un chemin injectif est qualifié de « chemin simple » et qu'une « courbe simple » est une courbe qui admet un paramétrage par un chemin simple.

courbe plane : dans le cas où  $\vec{\gamma}(t) = [t, f(t), 0]$  (courbe plane décrite par une fonction), on obtient

$$\int_a^b \sqrt{1 + (Df)^2} dt$$

Exemple : la chaînette

$$f(x) = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad x \in \text{un intervalle compact}$$

Représenter  $f$  et calculer la longueur de la courbe qui représente  $f$  pour  $x \in [-1; 1]$ .

### Surfaces

Dans le contexte du cours, nous n'utiliserons les surfaces que dans un cadre très pratique. Nous nous contenterons des définitions et propriétés pratiques suivantes, lesquelles sont rigoureuses d'un point de vue mathématique mais ne rencontrent certes pas une étude plus vaste de la théorie des surfaces.

<sup>4</sup>que l'on appelle aussi lacets



Nous nous plaçons d'emblée dans un contexte qui va autoriser la définition d'intégrales intrinsèques.

Par définition, une *couverture* est la donnée d'un compact<sup>5</sup>  $K$  de  $\mathbb{R}^2$ , d'une fonction vectorielle  $\vec{\phi}$  de classe  $C_1$  dans un ouvert contenant  $K$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}^3$ , vérifiant les propriétés suivantes

- l'application  $\vec{\phi}$  est injective sur l'intérieur de  $K$ ,
- et il existe une fonction vectorielle  $\vec{\psi}$  de classe  $C_1$  dans un ouvert de  $\mathbb{R}^3$  contenant l'image par  $\vec{\phi}$  de l'intérieur de  $K$  telle que<sup>6</sup>  $\vec{\psi}(\phi_1(t, s), \phi_2(u, v), \phi_3(u, v)) = [u, v]$  pour tout  $(u, v)$  appartenant à l'intérieur de  $K$ .

On appelle *surface* (ou portion régulière de surface), une partie  $S$  de  $\mathbb{R}^3$  pour laquelle il existe une couverture dont l'image est  $S$ .

### En pratique

Pour la suite des définitions nous considérerons que :

- le chemin  $\vec{\gamma} = [\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3] : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  ( $\mathbb{R}^2$ ) est suffisamment régulier au sens de la dérivabilité et de la non annulation de la dérivée (en aucun point), rectifiable. Ce chemin sert à paramétrer une courbe.
- la couverture  $\vec{\phi} : K \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  est suffisamment régulière<sup>7</sup> et sert à paramétrer une surface.

### Orientation

Soit  $\vec{\gamma}(t)$ ,  $t \in [a, b]$  une représentation paramétrique simple de la courbe simple  $\mathcal{C}$ . Alors, pour toute représentation paramétrique simple  $\vec{r}(t)$ ,  $t \in [c, d]$  de  $\mathcal{C}$ , il existe une fonction  $f$ , continue et strictement monotone sur  $[c, d]$ , d'image égale à  $[a, b]$  et telle que<sup>8</sup>  $\vec{r}(t) = \vec{\gamma}(f(t))$  pour tout  $t \in [c, d]$ .

Entre les paramétrages simples d'une même courbe, on peut ainsi définir une relation d'équivalence : deux paramétrages sont dits équivalents si la fonction qui permet de passer de l'un à l'autre est strictement croissante. Cette relation définit deux classes et choisir l'une des deux classes s'appelle orienter la courbe.

On écrit alors  $\mathcal{C}^+$  pour signifier que l'on a orienté la courbe.

Sans entrer dans les détails, disons que l'on établit pour les surfaces un résultat analogue à celui des paramétrages de courbes par des chemins simples : quand on dispose de deux couvertures d'une même surface<sup>9</sup>, on montre qu'il y a toujours un changement de variables entre les deux. On répartit alors les couvertures en deux classes, selon le signe du déterminant jacobien du changement de variables qui permet de passer de l'une à l'autre. Orienter la surface consiste alors à choisir l'une des deux classes.

On écrit alors  $S^+$  pour signifier que l'on a orienté la surface.

<sup>5</sup>on supposera que l'intérieur de  $K$  est non vide

<sup>6</sup>Cela signifie que l'on doit pouvoir inverser  $\vec{\phi}$  de façon régulière

<sup>7</sup>Régulière au sens indiqué au dessus, ajouté de la condition de non-annulation de la fonction  $(u, v) \mapsto \vec{N}(u, v) := D_u \vec{\phi} \wedge D_v \vec{\phi}$  en tout point de l'intérieur de  $K$ .

<sup>8</sup>cette relation caractérise en fait  $f$

<sup>9</sup>c'est ici qu'il faudrait prendre soin de préciser s'il s'agit de notion locale ou globale que l'on considère

## Vecteur tangent

### En un point d'une courbe

Un vecteur tangent en un point  $P$  tel que  $\overrightarrow{OP} = \vec{\gamma}(t)$  d'une courbe régulière est donné par la dérivée du (d'un) paramétrage.

$$\vec{v}(t) = D\vec{\gamma}(t)$$

### Remarques :

- Le vecteur tangent non-unitaire est noté  $\vec{v}$  pour rappeler la vitesse en physique.
- Si l'on change de paramétrage, les vecteurs tangents obtenus ainsi ne sont pas les mêmes en général, mais ils sont multiples l'un de l'autre.

Si l'on considère à présent une courbe orientée (et régulière), tous les vecteurs obtenus par le processus précédent, divisés par leur norme, sont égaux (et changer d'orientation donne simplement le vecteur opposé).

On définit ainsi le vecteur tangent unitaire au point  $P$  de la courbe orientée  $\mathcal{C}^+$  :

$$\vec{t}(P) = \frac{D\vec{\gamma}(t)}{\|D\vec{\gamma}(t)\|}$$

quel que soit le paramétrage  $\vec{\gamma}$  de la courbe pour autant qu'il appartienne à l'orientation choisie.

### En un point d'une surface

L'ensemble des vecteurs tangents à la surface  $\mathcal{S}$  est le plan vectoriel engendré par  $D_u\vec{\phi}$  et  $D_v\vec{\phi}$ .

## Vecteur normal

### En un point d'une surface

Pour tout  $(u, v)$ , le vecteur normal :  $\vec{N}(u, v) = D_u\vec{\phi} \wedge D_v\vec{\phi}$  est orthogonal au plan tangent à la surface au point paramétré par  $(u, v)$ .

On peut donc aussi définir une normale unitaire continue

$$\vec{n}(u, v) = \frac{\vec{N}(u, v)}{\|\vec{N}(u, v)\|}$$

en tout point de l'image par  $\vec{\phi}$  de l'intérieur de  $K$ .

Remarque : On dit que l'on peut orienter cette partie de la surface (ie celle qui correspond à l'image par  $\phi$  de l'intérieur de  $K$ ). Quand on définit un vecteur normal unitaire à l'aide d'une couverture, un changement de couverture de la même orientation ne change pas le vecteur normal unitaire ; par contre, une couverture de l'autre orientation donne l'opposé du vecteur en guise de vecteur normal unitaire.

## 2.5.2 Longueur d'une courbe et aire d'une surface

### Longueur de courbe et chemin rectifiable

Soit un chemin  $\vec{\gamma}$  **continûment dérivable** dans un ensemble ouvert<sup>10</sup>  $I \subset \mathbb{R}$ . Dans ce cas, le chemin est dit rectifiable lorsque que la fonction  $t \mapsto \|D\vec{\gamma}(t)\|$  est intégrable sur  $I$ .

La longueur d'un chemin rectifiable est (en écrivant  $I = ]a, b[$ )

$$\int_a^b \|D\vec{\gamma}(t)\| dt$$

### Aire d'une surface

L'aire de la surface  $\mathcal{S}$  est :

$$\iint_K \|D_u \vec{\phi} \wedge D_v \vec{\phi}\| du dv$$

## 2.5.3 Intégrale sur un chemin (une courbe)

Soient :

$$\vec{f} = [f_1, f_2, f_3] : \Omega \xrightarrow{C_0} \mathbb{R}^3 \text{ (ou } \mathbb{C}^3) \quad \Omega \subset \mathbb{R}^3 \text{ ouvert.}$$

$$g : \Omega \xrightarrow{C_0} \mathbb{R},$$

$$\vec{\gamma} = [\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3] : [a, b] \subset \mathbb{R} \xrightarrow{C_1} \Omega,$$

$$\vec{\phi} : K \subset \mathbb{R}^2 \xrightarrow{C_1} \mathbb{R}^3.$$

L'intégrale sur un chemin est une généralisation du cas précédent dans lequel  $g = 1$ <sup>11</sup>.

$$\int_{\vec{\gamma}} g ds = \int_a^b g(\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t)) \|D_t \vec{\gamma}(t)\| dt$$

est l'intégrale de  $g$  sur le chemin  $\vec{\gamma}$  : un paramétrage régulier d'une courbe  $\mathcal{C}$

Si elle est indépendante du paramétrage  $\vec{\gamma}$  de la courbe  $\mathcal{C}$  on la note  $\int_{\mathcal{C}} g ds$ .

Pour rappel : (cours de géométrie)

Ceci correspond à l'intégrale d'une fonction continue  $g$  sur une courbe (rectifiable)  $\mathcal{C}$  vue en géométrie et dans laquelle le paramètre est l'abscisse curviligne.

$$\int_{\mathcal{C}} g ds = \int_{s_0}^{s_1} g ds$$

<sup>10</sup>Il n'est pas nécessaire de considérer  $I$  comme un intervalle ouvert mais il faut alors faire attention aux notions de dérivation sur un fermé.

<sup>11</sup>Voir EK pour une interprétation du cas particulier  $g = 1$

où  $s$  désigne l'abscisse curviligne. Si on utilise un autre paramétrage (régulier et injectif), un changement de variable donne

$$\int_{\mathcal{C}} g ds = \int_a^b g(\vec{\gamma}(t)) \|D\vec{\gamma}(t)\| dt$$

(En fait, l'intégrale faisant intervenir l'abscisse curviligne est un cas particulier de celui-ci puisque dans ce cas, la dérivée de  $\vec{\gamma}(s)$  est de longueur 1.)

Pour rappel encore :  $s(t) = \int_{t_0}^t \|D\vec{\gamma}(x)\| dx$ . Cette intégrale ne dépend pas du paramétrage (injectif et régulier).

## 2.5.4 Intégrale curviligne, le long d'un chemin

L'intégrale le long du chemin  $\vec{\gamma}$  de  $\vec{f}$  est par définition :

$$\begin{aligned} \int_{\vec{\gamma}} f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz &= \int_a^b \vec{f}(\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t)) \bullet D_t \vec{\gamma}(t) dt \\ &= \int_a^b \left( f_1(\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t)) D_t \gamma_1(t) + f_2(\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t)) D_t \gamma_2(t) \right. \\ &\quad \left. + f_3(\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t)) D_t \gamma_3(t) \right) dt \end{aligned}$$

*Remarques :*

- Si la courbe est fermée, elle se note par  $\oint_{\vec{\gamma}} f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz$
- Faire attention à ne pas confondre avec l'intégrale sur une courbe ou sur un chemin.
- En général, cette intégrale dépend du chemin, i.e. du paramétrage. L'utilisation de  $\int_{\mathcal{C}}$  est un abus de notation. Il existe des conditions suffisantes permettant d'affirmer l'indépendance vis-à-vis du paramétrage.
- Dans ce cas, on doit également faire attention à l'orientation. Cependant, avec des hypothèses naturelles, on peut définir la notion d'intégrale curviligne d'une fonction sur une courbe orientée.

Lien entre l'intégrale sur une courbe et l'intégrale curviligne

$$\begin{aligned} \int_{\vec{\gamma}} g dx &= \int_a^b g(\vec{\gamma}(t)) \cdot D_t \gamma_1(t) dt \\ &= \int_a^b g(\vec{\gamma}(t)) \frac{D_t \gamma_1(t)}{\|D_t \vec{\gamma}(t)\|} \|D_t \vec{\gamma}(t)\| dt \\ &= \int_{\vec{\gamma}} g t_1 ds \end{aligned}$$

où  $t_1$  est la première composante du vecteur unitaire tangent (unique à l'orientation près). On fait de même pour les intégrales en  $dy$  et  $dz$ .

## 2.5.5 Intégrale sur une surface

L'intégrale sur une surface est une généralisation de la formule de l'aire ( $g = 1$ ).

$$\iint_{\vec{\phi}} g d\sigma = \iint_K g(\vec{\phi}(u, v)) \|\vec{N}(u, v)\| dudv$$

où

$$\vec{N}(u, v) = D_u \vec{\phi} \wedge D_v \vec{\phi}$$

est le vecteur normal à la surface  $\mathcal{S}$  paramétrée par  $\vec{\phi}(u, v)$ ,  $(u, v) \in K$  (un paramétrage injectif et régulier).

### 2.5.6 Intégrale surfacique, le long d'une surface

Les intégrales surfaciques sont des intégrales du type

$$\begin{aligned} \iint_{\vec{\phi}} f_3 dx \wedge dy &= \iint_K f_3(\vec{\phi}(u, v)) N_3(u, v) dudv \\ \iint_{\vec{\phi}} f_2 dx \wedge dz &= \iint_K f_2(\vec{\phi}(u, v)) N_2(u, v) dudv \\ \iint_{\vec{\phi}} f_1 dy \wedge dz &= \iint_K f_1(\vec{\phi}(u, v)) N_1(u, v) dudv \end{aligned}$$

où  $N_1, N_2, N_3$  sont les composantes du vecteur normal  $\vec{N} : \vec{N}(u, v) = D_u \vec{\phi}(u, v) \wedge D_v \vec{\phi}(u, v)$ .

*Remarques :* La définition fait intervenir une couverture (i.e. un paramétrage  $\vec{\phi}$ ). Ce n'est que sous certaines conditions (injectivités, orientation, régularité) que l'on peut rigoureusement utiliser la notation  $\iint_{\mathcal{S}}$ .

*Le lien entre intégrale surfacique et intégrale sur une surface*

$$\iint_K g(\vec{\phi}(u, v)) N_3(u, v) dudv = \iint_{\mathcal{S}} g n_3 d\sigma = \iint_{\mathcal{S}} g dx \wedge dy$$

où  $n_3$  est la troisième composante du vecteur normal unitaire (et analogue pour les autres cas).

### 2.5.7 Notion d'orientation et d'invariance des intégrales

Bien que l'on définisse toutes les intégrales curvilignes, sur des courbes et sur des surfaces grâce à un paramétrage (ce qui est un abus de langage), la valeur de l'intégrale est bien indépendante du paramétrage choisi pour autant que certaines précautions d'injectivité, d'orientation et de régularité soient prises.

#### Invariance de l'intégrale sur des chemins simples rectifiables qui ont la même image

Si l'on dispose de deux paramétrages d'une même courbe simple par des chemins simples rectifiables  $\vec{\gamma}_1$  et  $\vec{\gamma}_2$  et si  $g$  est une fonction continue sur la courbe, alors

$$\int_{\vec{\gamma}_1} g ds = \int_{\vec{\gamma}_2} g ds.$$

On peut alors définir l'intégrale de  $g$  sur la courbe simple rectifiable  $\mathcal{C}$  comme étant l'intégrale de  $g$  sur n'importe quel chemin simple rectifiable  $\vec{\gamma}$  paramétrant la courbe :

$$\int_{\mathcal{C}} g \, ds = \int_{\vec{\gamma}} g \, ds.$$

### Intégrale curviligne le long de chemins rectifiables qui ont la même image

Si l'on dispose de deux paramétrages d'une même courbe simple par des chemins simples rectifiables  $\vec{\gamma}_1$  et  $\vec{\gamma}_2$  et si  $\vec{f}$  est une fonction continue sur la courbe, alors

$$\int_{\vec{\gamma}_1} f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz = \pm \int_{\vec{\gamma}_2} f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz$$

le signe  $+$  correspondant au cas où les paramétrages font partie de la même orientation et le signe  $-$  au cas où leurs orientations sont différentes.

On peut alors définir l'intégrale curviligne de  $f$  le long de la courbe simple rectifiable orientée  $\mathcal{C}^+$  comme étant l'intégrale de  $f$  sur n'importe quel chemin simple rectifiable  $\vec{\gamma}$  paramétrant la courbe et qui appartient à l'orientation choisie :

$$\int_{\mathcal{C}^+} f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz = \int_{\vec{\gamma}} f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz.$$

### Invariance de l'intégrale sur des couvertures qui ont la même image.

Si l'on dispose de deux couvertures  $(\vec{\phi}^1, K_1)$  et  $(\vec{\phi}^2, K_2)$  d'une même surface  $\mathcal{S}$  et si  $g$  est une fonction continue sur  $\mathcal{S}$ , alors

$$\int_{K_1} g(\vec{\phi}^1(u, v)) \left\| D_u \vec{\phi}^1 \wedge D_v \vec{\phi}^1 \right\| \, du \, dv = \int_{K_2} g(\vec{\phi}^2(u, v)) \left\| D_u \vec{\phi}^2 \wedge D_v \vec{\phi}^2 \right\| \, du \, dv.$$

On peut alors définir l'intégrale d'une fonction  $g \in C_0(\mathcal{S})$  sur la surface  $\mathcal{S}$ , notée  $\iint_{\mathcal{S}} g \, d\sigma$  par

$$\iint_{\mathcal{S}} g \, d\sigma = \iint_K g(\vec{\phi}(u, v)) \left\| D_u \vec{\phi} \wedge D_v \vec{\phi} \right\| \, du \, dv$$

quelle que soit la couverture  $(\vec{\phi}, K)$  choisie pour paramétrer  $\mathcal{S}$ .

## 2.6 Formules

### 2.6.1 Formule de Green dans le plan

Soient  $K$  un compact du plan  $xy$  dont le contour  $\mathcal{C}$  est composé de l'union finie de courbes planes orientées et  $\vec{f} = [f_1, f_2] : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{C}^2$  tel que  $K \subset \Omega \subset \mathbb{R}^2$  et  $f_1, f_2$  sont continûment dérivables dans  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ . On a

$$\iint_K (D_x f_2 - D_y f_1) dx dy = \oint_{\mathcal{C}^+} (f_1 dx + f_2 dy)$$

#### Démonstration dans un cas particulier

Ce cas est le cas particulier où le compact est « parallèle à l'axe des  $y$  ».

$$u, v : [a, b] \xrightarrow{C_0} \mathbb{R}$$

$$u, v : ]a, b[ \xrightarrow{C_1} \mathbb{R}$$

$$Du, Dv \in \mathbb{L}_1(]a, b[)$$

$$u(x) < v(x), \forall x \in ]a, b[$$

$$K = \{ (x, y) : x \in [a, b] \quad \& \quad u(x) \leq y \leq v(x) \}$$

La courbe  $\mathcal{C}^+$  est la courbe orientée « aire à gauche » constituée de la juxtaposition des courbes orientées  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_4$ .

Montrons que

$$\iint_K D_x f_2 dx dy = \int_{\mathcal{C}^+} f_2 dy \quad (1)$$

et que

$$\iint_K D_y f_1 dx dy = - \int_{\mathcal{C}^+} f_1 dx \quad (2)$$

lorsque  $\vec{f} = [f_1, f_2] : \Omega \xrightarrow{C_1} \mathbb{R}^2$ ,  $K \subset \Omega$

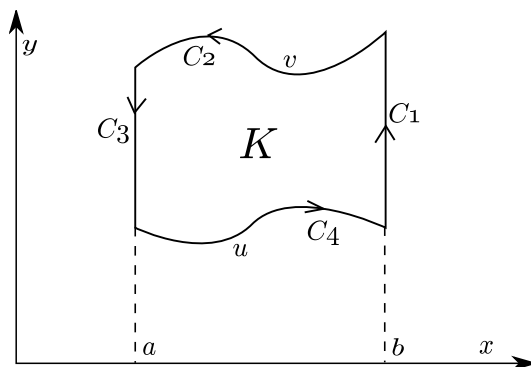


FIG. 2.3 – Représentation du compact  $K$

Membre de gauche de (1) :

$$\iint_K \underbrace{D_x f_2}_{\in \mathcal{L}_1(K)} dx dy = \int_a^b \int_{u(x)}^{v(x)} D_x f_2(x, y) dy dx$$

Intégrale paramétrique dont les bornes dépendent du paramètre.

$$\underbrace{D_x \int_{u(x)}^{v(x)} f_2(x, y) dy}_{F(u(x), v(x), x)}$$

qui ressemble à

$$F(\alpha, \beta, \gamma) = \int_\alpha^\beta f_2(\gamma, y) dy$$

On pose  $G(x) = F(u(x), v(x), x)$  et on dérive en utilisant le théorème de dérivation des fonctions composées (dont vous n'oubliez pas de vérifier les hypothèses).

Rappel sur les primitives, pour  $f$  continu sur un intervalle ouvert contenant  $t_0$  :

$$g(t) = \int_{t_0}^t f(s) ds \Rightarrow D_t g(t) = f(t)$$

Ici, on a alors,

$$\begin{aligned} D_x G(x) &= D_x F(u(x), v(x), x) = (D_\alpha F)_{(u(x), v(x), x)} u'(x) + (D_\beta F)_{(u(x), v(x), x)} v'(x) + (D_\gamma F)_{(u(x), v(x), x)} \\ &= -f_2(x, u(x)) u'(x) + f_2(x, v(x)) v'(x) + \int_{u(x)}^{v(x)} D_x f_2(x, y) dy \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \iint_K D_x f_2 dx dy &= \int_a^b \left( D_x G(x) + f_2(x, u(x)) u'(x) - f_2(x, v(x)) v'(x) \right) dx \\ &= \int_{u(b)}^{v(b)} f_2(b, y) dy - \int_{u(a)}^{v(a)} f_2(a, y) dy + \int_a^b [f_2(x, u(x)) u'(x) - f_2(x, v(x)) v'(x)] dx \end{aligned}$$

Membre de droite de (1) :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1 &: [b, t], \quad t \in [u(b), v(b)] \\ -\mathcal{C}_2 &: [t, v(t)], \quad t \in [a, b] \\ -\mathcal{C}_3 &: [a, t], \quad t \in [u(a), v(a)] \\ \mathcal{C}_4 &: [t, u(t)], \quad t \in [a, b] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}^+} &= \int_{\mathcal{C}_1} + \int_{\mathcal{C}_2} + \int_{\mathcal{C}_3} + \int_{\mathcal{C}_4} \\ &= \int_{u(b)}^{v(b)} f_2(b, t) \cdot 1 dt - \int_a^b f_2(t, v(t)) v' dt - \int_{u(a)}^{v(a)} f_2(a, t) dt + \int_a^b f_2(t, u(t)) u' dt \end{aligned}$$

et l'égalité 1 d'être prouvée.



Membre de gauche (2) :

$$\iint_K D_y f_1 dx dy = \int_a^b \left( \int_{u(x)}^{v(x)} D_y f_1(x, y) dy \right) dx = \int_a^b (f_1(x, v(x)) - f_1(x, u(x))) dx$$

par variation de primitive.

Membre de droite de l'égalité (2) :

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}^+} &= \int_{\mathcal{C}_1} + \int_{\mathcal{C}_2} + \int_{\mathcal{C}_3} + \int_{\mathcal{C}_4} \\ &= \int_{u(b)}^{v(b)} f_1(b, t) \cdot 0 dt - \int_a^b f_1(t, v(t)) \cdot 1 dt - \int_{u(a)}^{v(a)} f_1(a, t) \cdot 0 dt + \int_a^b f_1(t, u(t)) \cdot 1 dt \\ &= - \int_a^b f_1(t, v(t)) dt + \int_a^b f_1(t, u(t)) dt \end{aligned}$$

Et la formule complète d'être prouvée.

### Application de la formule de Green

La formule de Green s'écrit

$$\iint_K (D_x f_2 - D_y f_1) dx dy = \oint_{\mathcal{C}^+} (f_1 dx + f_2 dy)$$

dans le cas de  $f_2 = x$  et  $f_1 = 0$ , on a

$$\iint_K dx dy = \oint_{\mathcal{C}^+} x \cdot dy$$

et pour  $f_1 = -y$  et  $f_2 = 0$ , on a

$$\iint_K dx dy = \oint_{\mathcal{C}^+} -y \cdot dx$$

Ceci permet d'appliquer la formule de Green au cas du calcul d'aire de surfaces planes.

Par exemple : aire d'une ellipse d'équation cartésienne  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$   
Paramétrage de  $\mathcal{C}$ , bord de  $K$  :

$$\begin{cases} x = x(t) = a \cos t \\ y = y(t) = b \sin t \end{cases}, \quad t \in [0; 2\pi]$$

$$\iint_K dx dy = \int_0^{2\pi} a \cos t \cdot b \sin t dt = ab \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = \frac{ab}{2} \int_0^{2\pi} (\cos 2t + 1) dt = \frac{ab}{2} \int_0^{2\pi} dt = \pi ab$$

### 2.6.2 Formule de Gauss ou Théorème de la divergence

Soient  $V$  un compact de l'espace ( $\mathbb{R}^3$ ) dont la frontière  $\mathcal{S}$  est composée de l'union finie de surfaces orientables et  $\vec{f} = [f_1, f_2, f_3] : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ , une fonction vectorielle de classe  $C_1$  telle que  $V \subset \Omega \subset \mathbb{R}^3$ . Alors

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{f} dx dy dz = \iint_{\mathcal{S}} \vec{f} \bullet \vec{n} d\sigma$$

où  $\vec{n}$  est la normale unitaire extérieure à la surface  $\mathcal{S}$ .

## Application

Soit  $U$  un champ scalaire inconnu qui représente la température en chaque point d'un corps. La quantité de chaleur qui entre dans le volume par unité de temps :

$$\iint_{\mathcal{S}} \underbrace{\vec{\nabla}U}_{f(x,y,z)} \cdot \vec{n} d\sigma$$

Vu que c'est une modélisation d'un système réel, on trouve que  $U$  doit vérifier :

$$\iiint_V D_t U dx dy dz = \iint_{\mathcal{S}} \vec{\nabla}U \cdot \vec{n} d\sigma$$

Grâce au théorème de Gauss, on peut égaler :

$$\iiint_V D_t U dx dy dz = \iiint_V \operatorname{div} \vec{\nabla}U dx dy dz$$

d'où, la relation appelée "équation de la chaleur"

$$D_t U = \operatorname{div} \vec{\nabla}U = \Delta U$$

où

$$\Delta U = D_x^2 U + D_y^2 U + D_z^2 U$$

est le **Laplacien** de la fonction scalaire  $U$ .

Exemples D'autres exemples d'application peuvent être trouvés à la page 459 du EK. La section 10.8 page 463 donne aussi deux exemples ainsi que l'interprétation physique de la divergence.

### 2.6.3 Formule de Stokes

Soient  $\mathcal{S}$  une union finie de surfaces régulières orientables\* dont la frontière est la courbe fermée orientée\*  $\mathcal{C}$  composée d'une union finie d'arcs de courbes réguliers et  $\vec{f} = [f_1, f_2, f_3]$  de classe  $C_1 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  telle que  $\mathcal{S} \subset \Omega \subset \mathbb{R}^3$ , alors

$$\iint_{\mathcal{S}} \operatorname{rot} \vec{f} \cdot \vec{n} d\sigma = \oint_{\mathcal{C}} \vec{f} \cdot \vec{t} ds = \oint_{\mathcal{C}} f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz$$

où  $\vec{n}$  est la normale unitaire à  $\mathcal{S}$  et  $\vec{t}$  est le vecteur tangent unitaire à  $\mathcal{C}$ .

\* La courbe  $\mathcal{C}$  est orientée de manière à respecter la règle du tire-bouchon lors de son parcours par rapport à l'orientation de  $\vec{n}$ .

Exercice : Vérifier que cette formule généralise la formule de Green dans le plan.

### Exemple

Retour à un exemple de champ dont la divergence est nulle mais qui ne dérive pas d'un potentiel vectoriel.

$$\vec{a} = \frac{\vec{r}}{||\vec{r}||^3} \text{ avec } \vec{r} = [x, y, z] \text{ et } \Omega = \mathbb{R}_0^3$$

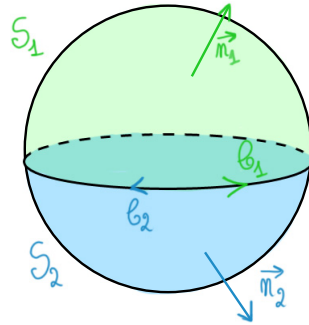


FIG. 2.4 – « Sphère »

Par l'absurde : si il existe  $\vec{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  de classe  $C_2$  tel que  $\mathbf{rot} \vec{f} = \vec{a}$ , alors

$$\iint_S \mathbf{rot} \vec{f} \cdot \vec{n} \, d\sigma = \iint_S \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|^3} \cdot \vec{n} \, d\sigma = \iint_S d\sigma = 4\pi$$

Par Stokes sur chacune des deux parties de la sphère :

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{rot} \vec{f} \cdot \vec{n} \, d\sigma &= \iint_{S_1} \mathbf{rot} \vec{f} \cdot \vec{n}_1 \, d\sigma + \iint_{S_2} \mathbf{rot} \vec{f} \cdot \vec{n}_2 \, d\sigma \\ &= \oint_{C_1} \vec{f} \cdot \vec{t} \, ds + \oint_{C_2} \vec{f} \cdot \vec{t} \, ds \\ &= 0 \end{aligned}$$

Parce que  $C_1 = -C_2$  (orientation opposée).

L'existence de deux valeurs différentes pour l'intégrale donne lieu à une absurdité. On en déduit que  $\vec{f}$  n'existe pas. Ce qui ne doit pas surprendre :  $\Omega$  n'était pas étoilé.

# Lien avec le chapitre 3

## 2.7 L'indépendance des intégrales

Nous allons étudier l'indépendance de certaines intégrales curvilignes vis-à-vis de chemins reliant deux points.

### 2.7.1 Homotopie de chemins

Soit deux chemins  $\vec{\gamma}, \vec{\gamma}' : [a, b] \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^n$  de classe  $C_0$ .

*Définition :*

$\vec{\gamma}$  et  $\vec{\gamma}'$  sont dits homotopes dans  $\Omega$  comme chemins à extrémités fixes lorsque :  
 $\exists \vec{H} : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow \Omega$  continu tel que

$$\begin{aligned}\vec{\gamma}(t) &= \vec{H}(t, 0) & \forall t \in [a, b] \\ \vec{\gamma}'(t) &= \vec{H}(t, 1) & \forall t \in [a, b] \\ \vec{H}(a, s) &= \vec{\gamma}(a) = \vec{\gamma}'(a) & \forall s \in [0, 1] \\ \vec{H}(b, s) &= \vec{\gamma}(b) = \vec{\gamma}'(b) & \forall s \in [0, 1]\end{aligned}$$

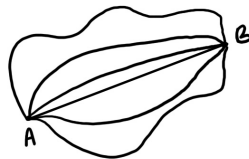


FIG. 2.5 – Homotopie de chemins à extrémités fixes

$\vec{\gamma}$  et  $\vec{\gamma}'$  sont dits homotopes dans  $\Omega$  comme chemins fermés lorsque  $\exists \vec{H} : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow \Omega$  continu.

$$\begin{aligned}\vec{\gamma}(t) &= \vec{H}(t, 0) \quad \forall t \in [a, b] \\ \vec{\gamma}'(t) &= \vec{H}(t, 1) \quad \forall t \in [a, b] \\ \vec{H}(a, s) &= \vec{H}(b, s) \quad \forall s \in [0, 1]\end{aligned}$$

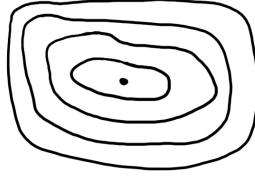


FIG. 2.6 – Homotopie de chemins fermés

Propriétés :

- si  $\vec{\gamma}$  et  $\vec{\gamma}'$  sont  $C_p$  alors on peut prendre  $\vec{H}$  de classe  $C_{p,\infty}$
- tout chemin continu est toujours homotope à un chemin  $C_1$  (homotopie à extrémités fixes)

### Invariance par homotopie

Soit

$$\vec{f} = [f_1, \dots, f_n] : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}^n, \text{ de classe } C_1$$

si  $D_j f_k = D_k f_j \quad \forall j, k = 1, \dots, n$ , dans  $\Omega$ , alors

$$\int_{\vec{\gamma}} f_1 dx_1 + \dots + f_n dx_n = \int_{\vec{\gamma}'}$$

pour tous chemins  $\vec{\gamma}, \vec{\gamma}'$  de classe  $C_1$ , homotopes dans  $\Omega$ .

Preuve On a (par définition)

$$\begin{aligned}\int_{\vec{\gamma}} f_1 dx_1 + \dots + f_n dx_n &= \int_a^b \vec{f}(\vec{\gamma}(t)) \bullet D\vec{\gamma}(t) dt = \int_a^b \vec{f}(\vec{H}(t, 0)) \bullet D\vec{H}(t, 0) dt \\ \int_{\vec{\gamma}'} f_1 dx_1 + \dots + f_n dx_n &= \int_a^b \vec{f}(\vec{\gamma}'(t)) \bullet D\vec{\gamma}'(t) dt = \int_a^b \vec{f}(\vec{H}(t, 1)) \bullet D\vec{H}(t, 1) dt\end{aligned}$$

Cela étant, pour tout  $s \in [0, 1]$ , l'intégrale

$$F(s) = \int_a^b \vec{f}(\vec{H}(t, s)) \bullet D\vec{H}(t, s) dt$$

est bien définie et représente une fonction continue. On va voir (par les intégrales paramétriques) que cette fonction est en fait dérivable sur  $]0, 1[$  et que sa dérivée est nulle dans cet intervalle.

On pourra alors conclure que  $F$  est indépendante de  $s \in [0, 1]$ , et obtenir la thèse, à savoir

$$F(0) = F(1).$$

Après vérification des hypothèses (intégrales paramétriques), on obtient

$$\begin{aligned}
D_s F(s) &= \int_a^b D_s \sum_{j=1}^n f_j(\vec{H}(t, s)) D_t H_j(t, s) dt \\
&= \int_a^b \sum_{j=1}^n \left( f_j(\vec{H}(t, s)) D_s D_t H_j(t, s) + D_t H_j(t, s) \sum_{k=1}^n (D_k f_j)(\vec{H}) D_s H_k(t, s) \right) dt \\
&= \int_a^b \left( \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \underbrace{D_k f_j(\vec{H})}_{D_j f_k} D_s H_k D_t H_j + \sum_{j=1}^n f_j(\vec{H}) D_s D_t H_j \right) dt \\
&= \int_a^b \left( \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n D_j f_k(\vec{H}) D_s H_k D_t H_j + \sum_{k=1}^n f_k(\vec{H}) D_s D_t H_k \right) dt \\
&= \int_a^b \underbrace{\left( \sum_{k=1}^n \left[ f_k(\vec{H}) D_s D_t H_k + \sum_{j=1}^n D_j f_k(\vec{H}) D_s H_k D_t H_j \right] \right)}_{D_t (f_k(\vec{H}) D_s H_k)} dt \\
&= \int_a^b D_t \left( \vec{f}(\vec{H}(t, s)) \bullet D_s \vec{H}(t, s) \right) dt \\
&= \vec{f}(\vec{H}(b, s)) \bullet D_s \vec{H}(b, s) - \vec{f}(\vec{H}(a, s)) \bullet D_s \vec{H}(a, s) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Car on a une homotopie (voir définition)

Généralisation Dans le cas où  $\vec{f}$  est seulement continu (dans ce cas l'hypothèse sur les dérivées croisées est obsolète), on remplace l'hypothèse des dérivées croisées par l'existence **locale** de  $\alpha$  de classe  $C_1$  tel que  $\vec{f} = \mathbf{grad} \alpha$ .

Remarque : Lorsque que le champ est  $C_1$ , l'hypothèse des dérivées croisées équivaut à l'existence du gradient (global ou local en fonction des propriétés de  $\Omega$ ).

## 2.8 Champ exact

Remarques :

Ces notions seront importantes dans le chapitre 3 :

- intégrales curvilignes,
- annulation du rotationnel,
- champ exact (dérivant d'un potentiel).

Pour rappel, l'intégrale curviligne de  $\vec{f} = [f_1, \dots, f_n]$  sur la courbe paramétrée par  $\vec{\gamma} = [\gamma_1, \dots, \gamma_n]$  est

$$\int_{\mathbf{c}} f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + \dots + f_n dx_n = \int_a^b [f_1(\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)) D_t \gamma_1 + \dots + f_n(\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)) D_t \gamma_n] dt$$

En notation abrégée :

$$= \int_a^b \vec{f}(\vec{\gamma}(t)) \bullet D\vec{\gamma}(t) dt$$

Soit  $\vec{f} = [f_1, \dots, f_n] : \Omega \xrightarrow{C_1} \mathbb{R}^n$  avec  $n \in \mathbb{N}_0$ ,  $\Omega$  ouvert de  $\mathbb{R}^n$ .

1.  $\exists \alpha : \Omega \xrightarrow{C_2} \mathbb{R}$  tel que :

$$\vec{f} = \mathbf{grad} \alpha$$

$\Updownarrow$

2. L'intégrale curviligne de  $\vec{f}$  pour tout chemin fermé est nulle (ou encore l'intégrale curviligne de  $\vec{f}$  ne dépend pas du chemin, seulement des deux extrémités de ce chemin).

$\Downarrow$

3. On a égalité des dérivées croisées  $D_j f_k = D_k f_j \quad \forall j, k \in \{1, \dots, n\}$ . (càd, quand  $n = 3$  :  $\mathbf{rot} \vec{f} = \vec{0}$ )

Si  $\Omega$  est simplement connexe, on a en plus : 3.  $\Rightarrow$  2.

Remarque :

- Si  $\vec{f}$  dérive d'un champ potentiel scalaire alors  $\vec{f}$  est appelée un champ exact.
- Les chemins considérés sont constitués de la juxtaposition d'un nombre fini de chemins de classe  $C_1$  (c.f. hypothèses EK p 421)

**Preuve : considérons le cas  $n = 3$**

(1)  $\Rightarrow$  (2) ?

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{C}} f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz &= \int_a^b D_1 \alpha dx + D_2 \alpha dy + D_3 \alpha dz \\ &= \int_a^b \left( (D_1 \alpha)(\vec{\gamma}(t)) D_t \gamma_1 + (D_2 \alpha)(\vec{\gamma}(t)) D_t \gamma_2 + (D_3 \alpha)(\vec{\gamma}(t)) D_t \gamma_3 \right) dt \\ &= \int_a^b D_t (\alpha(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)) dt = \alpha(\vec{\gamma}(b)) - \alpha(\vec{\gamma}(a)) = \alpha(B) - \alpha(A) \quad (*) \end{aligned}$$

La solution ne dépend pas du chemin parcouru, seulement des deux extrémités.

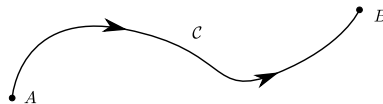


FIG. 2.7 – Indépendance du chemin

En conséquence,

$$\oint_{\mathcal{C}} f_1 dx + f_2 dx + f_3 dz = 0 \quad \forall \mathcal{C} \text{ à chemin fermé}$$

est évident car par la relation (\*) on a

$$\oint_{\mathcal{C}} f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz = \alpha(A) - \alpha(A) = 0$$

(2)  $\Rightarrow$  (1) ? On peut supposer  $\Omega$  connexe<sup>12</sup>.

Montrons que  $\exists \alpha$  fonction scalaire de classe  $C_1$  telle que  $\vec{f} = \mathbf{grad} \alpha$  dans  $\Omega$ .

Fixons un point  $P_0$  dans  $\Omega$ . Si  $P(x, y, z)$  est un point quelconque de  $\Omega$ , soit  $\vec{\gamma}_P$  un chemin reliant  $P_0$  à  $P$  en restant dans  $\Omega$ <sup>13</sup>. On pose

$$\alpha(x, y, z) = \int_{\vec{\gamma}} f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz$$

ce qui a bien un sens, vu l'hypothèse.

La fonction  $\alpha$  convient-elle ? Montrons que<sup>14</sup> :

$$D_1 \alpha = f_1$$

On a :

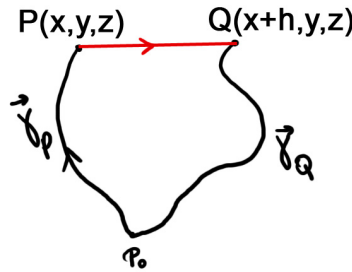


FIG. 2.8 – Segment horizontal

$$\alpha(x+h, y, z) - \alpha(x, y, z) = \int_{\text{Segment horizontal}} f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz = \int_0^1 f_1(x+th, y, z) h dt$$

Ainsi,

$$D_1 \alpha(x, y, z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\alpha(x+h, y, z) - \alpha(x, y, z)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \int_0^1 f_1(x+th, y, z) dt = f_1(x, y, z)$$

(2)  $\Rightarrow$  (3) ? Dans  $\mathbb{R}^3$  c'est évident : si  $\alpha \in C_2$ , on a  $\mathbf{rot} \vec{\nabla} \alpha = 0$

(3)  $\Rightarrow$  (2) ? Si  $\vec{f} \in C_1 : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^n$  vérifie les égalités croisées et si  $\Omega$  est simplement connexe alors, par homotopie à un chemin constant :

$$\int_{\vec{\gamma}} f_1 dx_1 + \dots + f_n dx_n = 0$$

pour tout chemin fermé  $\vec{\gamma}$  de classe  $C_1$ .

Relation entre les différents points :

Comme (2)  $\Rightarrow$  (3) avec l'équivalence (1) et (2) on sait aussi que (1) implique (3).

Quand  $\Omega$  est simplement connexe (ce qui est le cas des ouverts étoilés), toutes les relations sont nécessaires et suffisantes.

Remarque : voir aussi EK p 428.

<sup>12</sup>il est alors connexe par arcs et l'existence de chemins continus joignant deux points est assurée

<sup>13</sup>comme  $\Omega$  est connexe par arcs, c'est possible

<sup>14</sup>analogue pour les autres dérivées



# Chapitre 3

## Fonctions holomorphes

### Références du chapitre

#### Théorie

- Dans le EK (livre de référence) : chapitres 13, 14, 15, 16

#### Exercices

- Exercices du EK (se trouvant à la fin des sections et à la fin des chapitres).
- Applications : chapitres 17 et 18.
- Liste(s) d'exercices disponible(s) sur le site du service : <http://www.afo.ulg.ac.be/>

### 3.1 Introduction et notations

On travaille avec  $\mathbb{C}$  qui est semblable à  $\mathbb{R}^2$  en ce qui concerne la topologie.

$$z \in \mathbb{C} \quad z = (x, y) = x + iy \quad \text{avec } x, y \in \mathbb{R}$$

$f$  définie dans  $\Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow "f(z) = f(x, y)"$ . Ce qui permettra de parler des dérivations partielles, de  $C_1$  et d'utiliser les propriétés et théorèmes usuels dans ce cadre. ( $\mathbb{C}$  identifié à  $\mathbb{R}^2$  en ce qui concerne les variables.)

#### 3.1.1 Un cas particulier d'intégrales curvilignes

$$f : \Omega \subset \mathbb{C} = \mathbb{R}^2 \xrightarrow{C_0} \mathbb{C}$$
$$\gamma : \underbrace{[a, b]}_{I \subset \mathbb{R}} \rightarrow \Omega \subset \mathbb{C} \text{ de classe } C_1$$

$\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$  où  $\gamma_1, \gamma_2$  sont à valeurs réelles. On définit aussi  $\vec{\gamma} = [\gamma_1, \gamma_2]$ .

Définition :

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\vec{\gamma}} f dx + i f dy$$

Il s'agit donc d'une intégrale curviligne sur un chemin (courbe) du plan où le champ a deux composantes complexes :  $\underbrace{f}_{f_1}, \underbrace{if}_{f_2}$ .

On a donc :

$$\begin{aligned}
 \int_{\gamma} f(z)dz &= \int_{\vec{\gamma}} f dx + i f dy \\
 &= \int_a^b \left( f(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) D_t \gamma_1(t) + i f(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) D_t \gamma_2(t) \right) dt \\
 &= \int_a^b (f(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) D_t \gamma(t)) dt \\
 &= \int_a^b (f(\gamma(t)) D_t \gamma(t)) dt
 \end{aligned}$$

Attention  $\gamma(t)$  est un complexe.

### 3.1.2 Premières propriétés

On suppose que  $f$  est continu sur la courbe  $\mathcal{C}$  et que le paramétrage  $\gamma$  est de classe  $C_1$  (sur le fermé  $[a, b]$ ).

1. Lorsque  $f_1 = f = D_x \alpha$  et  $f_2 = i f = D_y \alpha$ , on obtient :

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathcal{C}} f(z)dz = \int_{\gamma} f(z)dz &= \int_a^b \left( (D_x \alpha)(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) D_t \gamma_1(t) + (D_y \alpha)(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) D_t \gamma_2(t) \right) dt \\
 &= \int_a^b D_t (\alpha(\gamma_1(t), \gamma_2(t))) dt \\
 &= \alpha(\gamma(b)) - \alpha(\gamma(a))
 \end{aligned}$$

Ce qui était le résultat obtenu dans  $\mathbb{R}^n$  pour les champs exacts.

2. On a aussi :

$$\left| \int_{\mathcal{C}} f(z)dz \right| = \left| \int_a^b f(\gamma(t)) D_t \gamma(t) dt \right| \leq \sup_{\mathcal{C}} |f| \cdot \int_a^b |D_t \gamma| dt$$

avec  $|D_t \gamma| = \text{module complexe} = \sqrt{(D_t \gamma_1)^2 + (D_t \gamma_2)^2} = \|D_t \vec{\gamma}\|$

D'où

$$\left| \int_{\mathcal{C}} f(z)dz \right| \leq \sup_{\mathcal{C}} |f| \cdot L_{\mathcal{C}}$$

## 3.2 Définition d'une fonction holomorphe

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{C}$  et  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ .

Si  $z_0 \in \Omega$  est tel que :

$$\lim_{h \in \mathbb{C}, h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} \text{ existe et est finie,}$$

on dit alors que la fonction est holomorphe en  $z_0$ .

Une fonction holomorphe dans  $\Omega$  est une fonction qui est holomorphe en tout point de  $\Omega$ .

Notation :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = Df(z_0)$$

Exemples :

- $f(z) = z$ ,  $f(z) = z^2$ ,  $f(z) = z^m$   $m \in \mathbb{N}$  sont des fonctions holomorphes dans  $\mathbb{C}$ .
- Par contre  $f(z) = \bar{z}$  n'est pas holomorphe dans  $\mathbb{C}$ .

Prenons  $h$  un réel pur :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1$$

Prenons  $h$  un imaginaire pur :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\bar{h}}{h} = -1$$

Par unicité de la limite, la limite n'existe pas.

### 3.2.1 Propriétés directes mais fondamentales

1. Si  $f$  est holomorphe dans  $\Omega$ , alors
  - $f$  est continue dans  $\Omega$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \underbrace{\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \cdot (z - z_0)}_{=0} + f(z_0)$$

- $f$  est dérivable par rapport à  $x$  et à  $y$  dans  $\Omega$  et vérifie  $D_x f + iD_y f = 0$ <sup>1</sup> dans  $\Omega$ .
- $D_x f = Df$ ,  $D_y f = iDf$

$$\lim_{h \in \mathbb{R}, h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} = D_x f = \lim_{h \in \mathbb{R}, h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = Df(z)$$

$$\lim_{h \in \mathbb{R}, h \rightarrow 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{(-i)h} = iD_y f = \lim_{h \in \mathbb{R}, h \rightarrow 0} \frac{f(z+ih) - f(z)}{(-i)h} = -Df(z)$$

2. Si  $f \in C_1(\Omega)$  (par rapport aux variables réelles) et si  $D_x f + iD_y f = 0$  dans  $\Omega$  alors  $f$  est holomorphe dans  $\Omega$ .

Preuve : On suppose  $f \in C_1$  et  $D_1 f + iD_2 f = 0$  dans  $\Omega$ .  $z \in \Omega$ ,  $h \in \mathbb{C}$  tel que  $z+h \in \Omega$   
On considère :  $z = x + iy = (x, y)$   $x, y \in \mathbb{R}$  et  $h = \Re h + i\Im h$

On a :

$$\begin{aligned} f(z+h) - f(z) &= f(x + \Re h, y + \Im h) - f(x, y) \\ &= \int_0^1 D_t(f(x + t\Re h, y + t\Im h)) dt \\ &= \int_0^1 [(D_1 f)_{z+th} \cdot \Re h + (D_2 f)_{z+th} \Im h] dt \\ &= \int_0^1 [(D_1 f)_{z+th} \cdot \Re h + i(D_1 f)_{z+th} \Im h] dt \\ &= \int_0^1 (D_1 f)_{z+th} \cdot \underbrace{(\Re h + i\Im h)}_h dt \end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{h \in \mathbb{C}, h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \int_0^1 (D_1 f)_{z+th} dt = (D_1 f)(z)$$

<sup>1</sup>Appelée équation de Cauchy-Riemann

### 3.2.2 Remarques au sujet de l'équation de Cauchy-Riemann

Sous forme complexe :

$$D_x f + iD_y f = 0 \quad (CR)$$

NB : Cela peut aussi s'écrire  $D_x(if) = D_y f$ .

En écrivant :  $f = \Re f + i\Im f = u + iv$  (avec  $\Re f = u$  partie réelle de  $f$  et  $\Im f = v$  partie imaginaire de  $f$ ). On a :

$$D_x f + iD_y f = D_x(u + iv) + iD_y(u + iv) = D_x u - D_y v + i(D_x v + D_y u)$$

On obtient "Cauchy Riemann Réel" :

$$\begin{cases} D_x \Re f = D_y \Im f \\ D_x \Im f = -D_y \Re f \end{cases} \quad (CRR)$$

Manipulation des notions dans l'intégrale curviligne

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\tilde{\gamma}} \underbrace{f dx + i f dy}_1 = \int_{\tilde{\gamma}} (\Re f + i\Im f) dx + (i\Re f - \Im f) dy = \underbrace{\int_{\tilde{\gamma}} \Re f dx - \Im f dy}_2 + i \underbrace{\int_{\tilde{\gamma}} \Im f dx + \Re f dy}_3$$

(CR) traduit l'égalité des dérivées croisées pour 1.

(CRR) traduit l'égalité des dérivées croisées pour 2 et 3 :

Compléments et applications Voir E.K. 13.4 (page 678) et chapitre 18 (pages 749 et s.)

### 3.3 Propriétés relatives aux intégrales des fonctions holomorphes

Si  $f$  est holomorphe dans  $\Omega$  (ouvert de  $\mathbb{C}$ ) et de classe  $C_1$ , alors

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma'} f(z) dz$$

pour tous chemins  $\gamma, \gamma'$  de classe  $C_1$  (par morceaux) qui sont homotopes dans  $\Omega$ .

Car nous avons démontré l'invariance par homotopie pour des fonctions de classe  $C_1$  qui respectaient les égalités croisées avec  $\tilde{\gamma}, \tilde{\gamma}'$  de classe  $C_1$  homotopes dans  $\Omega$ . Les égalités croisées sont traduites par Cauchy-Riemann pour une fonction  $C_1$ .

En particulier Si  $f$  est holomorphe dans  $\Omega$  et de classe  $C_1$ ,

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

si  $\gamma$  est fermé et si  $\gamma$  est homotope à un chemin constant (un point).

NB : On peut également démontrer ce résultat sans l'hypothèse «  $f$  de classe  $C_1(\Omega)$  ».

### 3.4 Propriétés de type général relatives aux fonctions holomorphes

1. Toute combinaison linéaire de fonctions holomorphes est holomorphe.
2. Le produit de deux fonctions holomorphes est holomorphe.
3. Si  $f$  est holomorphe dans  $\Omega$  et si  $f(z) \neq 0, \forall z \in \Omega$  alors  $\frac{1}{f}$  est holomorphe dans  $\Omega$ .
4. Tout polynôme est holomorphe dans  $\mathbb{C}$ . ( $P(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$ ).
5.  $f(z) = e^z = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{z^m}{m!}$  est holomorphe dans  $\mathbb{C}$  (par Cauchy-Riemann et dérivation des séries de puissances).
6. Si  $f$  est holomorphe dans l'ouvert connexe  $\Omega$  et tel que  $Df = 0$  dans  $\Omega$  alors  $f$  est constant dans  $\Omega$ . De fait, on a

$$Df = 0 \Rightarrow \begin{cases} D_x f = Df = 0 \\ D_y f = iDf = 0 \end{cases} \Rightarrow f = \text{constante dans } \Omega$$

7. Si  $f$  est holomorphe dans l'ouvert connexe  $\Omega$  et à valeurs réelles, alors  $f$  est constant dans  $\Omega$ .
8. Si  $f$  est holomorphe dans  $\Omega$  et si  $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega \subset \mathbb{C}$  est de classe  $C_1$ , alors

$$D_t(f(\gamma(t))) = (Df)_{\gamma(t)} D_t \gamma$$

9. Si  $f$  est holomorphe dans  $\Omega$ ,  $g$  est holomorphe dans  $\omega$  et  $g(\omega) \subset \Omega$ , alors  $f \circ g$  est holomorphe dans  $\omega$  et  $D(f \circ g) = (Df)_g Dg$ .
10. Si  $f$  est holomorphe dans  $\Omega$  et de classe  $C_2$  alors  $f, \Re f$  et  $\Im f$  vérifient  $\Delta u = 0$  dans  $\Omega$  (on dit que  $\Im f$  et  $\Re f$  sont des fonctions harmoniques réelles).

Preuve Rappelons que  $\Delta = D_x^2 + D_y^2$ . Cela étant, si  $f$  est holomorphe, alors  $D_x f = -iD_y f$  donc

$$D_x^2 f = -iD_x D_y f = -iD_y D_x f = i^2 D_y^2 f$$

d'où la conclusion.

### 3.5 Quelques exemples d'intégrales dans ce cadre

Exemple Si  $\gamma(t) = e^{it}, t \in [0, 2\pi]$ , calculez :

1.  $\int_{\gamma} z dz = 0$  car le cercle se « racrapotte » sur un point et  $f$  est holomorphe dans  $\mathbb{C}$
2.  $\int_{\gamma} \bar{z} dz = 2i\pi$  NB : la fonction conjuguée n'est pas holomorphe.
3.  $\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = 2i\pi$  La fonction n'est pas holomorphe à l'origine.
4.  $\int_{\gamma} \frac{1}{z^2} dz = 0$  Parce que c'est la valeur de l'intégrale, pas pour des raisons homotopiques.

### 3.6 Primitives dans le cadre des fonctions holomorphes

Si  $f$  est holomorphe dans  $\Omega$  simplement connexe, alors il existe  $F$  holomorphe dans  $\Omega$  tel que :  
 $DF = f$

Preuve : Ceci est une conséquence de la relation de Cauchy-Riemann et de tout ce que nous avons vu dans le chapitre II à propos des champs exacts.

## 3.7 Fonctions holomorphes élémentaires

Nous avons déjà : polynômes, fractions rationnelles, exponentielles. Pour rappel

La fonction exponentielle est en fait définie dans  $\mathbb{C}$  et est même holomorphe dans  $\mathbb{C}$  :

$$\exp(z) = e^z = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{z^m}{m!} \quad z \in \mathbb{C}$$

et on définit aussi

$$\begin{aligned} \cos z &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, & \cosh z &= \frac{e^z + e^{-z}}{2} \\ \sin z &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, & \sinh z &= \frac{e^z - e^{-z}}{2} \end{aligned}$$

NB :  $\cos(iz) = \cosh z$  et  $\sin(iz) = i \sinh z$

### 3.7.1 Le logarithme complexe

La fonction exponentielle est holomorphe dans  $\mathbb{C}$  mais elle n'y est pas injective !

$$\exp(z + 2im\pi) = \exp(z) \quad \forall m \in \mathbb{Z}, \forall z \in \mathbb{C}$$

L'idée pour définir un logarithme est pourtant la même que lorsqu'on travaille avec des fonctions de variables réelles, inverser :

$$u = e^z \Leftrightarrow z \text{ en fonction de } u?$$

On a

$$z = x + iy \implies u = e^x e^{iy} \implies |u| = e^x \implies \ln |u| = x \text{ et } y = \text{argument de } u.$$

On considère alors la fonction argument :

Arg

(valeur principale de l'argument d'un complexe non nul, à valeurs dans  $] -\pi, \pi]$ )

- elle est bien définie dans  $\mathbb{C}_0$  et est à valeurs dans  $] -\pi, \pi]$  (convention) ; elle n'est cependant pas continue dans  $\mathbb{C}_0$
- elle est de classe  $C_\infty$  dans  $\Omega = \mathbb{C} \setminus ] -\infty, 0]$  et

$$D_x \text{Arg}(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}, \quad D_y \text{Arg}(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

Et grâce à cette nouvelle fonction on définit le logarithme complexe.

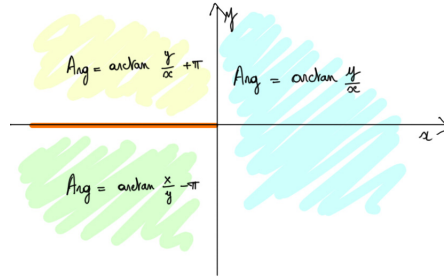


FIG. 3.1 – Valeur de l'argument dans le plan complexe

*Définition du logarithme complexe et propriétés :*

Soit  $\Omega = \mathbb{C} \setminus ]-\infty, 0]$ ,

$$\text{Ln} : \Omega \rightarrow \mathbb{C} : z \mapsto \ln |z| + i \text{Arg} z$$

Ln est de classe  $C_\infty$  dans  $\Omega$ ,

1. holomorphe dans  $\Omega$ ,
2.  $D \text{Ln} z = \frac{1}{z}$  dans  $\Omega$ ,
3.  $e^{\text{Ln} z} = z \quad \forall z \in \Omega$
4.  $\text{Ln}(e^z) = z + 2ik\pi \quad \forall z$  tels que  $e^z \in \Omega$

**Remarque.** En fait, le logarithme est défini (par l'expression ci-dessus) dans le complémentaire de l'origine ; il n'y est cependant pas continu (cf fonction Arg)

Preuve : Calculons les dérivées de Ln :

$$D_x \text{Ln} z = D_x \ln \sqrt{x^2 + y^2} + i D_x \arg z = \frac{1}{2} \frac{2x}{x^2 + y^2} + i \frac{-y}{x^2 + y^2} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$$

$$D_y \text{Ln} z = D_y \ln \sqrt{x^2 + y^2} + i D_y \arg z = \frac{1}{2} \frac{2y}{x^2 + y^2} + i \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{y + ix}{x^2 + y^2}$$

1. Ln est holomorphe car il est de classe  $C_1$  et vérifie l'équation de Cauchy-Riemann

$$(D_x + i D_y) \text{Ln} z = \frac{x - iy + i(y + ix)}{x^2 + y^2} = 0$$

2. On a

$$D \text{Ln} z = D_x \text{Ln} z = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{1}{z}$$

3.  $e^{\text{Ln} z} = e^{\ln |z|} \cdot e^{i \text{Arg}(z)} = |z| \cdot \exp(i \text{Arg} z) = z \quad \forall z \in \Omega$

4.  $\text{Ln} e^z = \ln |e^z| + i \text{Arg} e^z = x + i(y + 2k\pi) = z + i2k\pi$  parce que l'argument doit être dans  $] -\pi, \pi]$ .

Remarques

- Le logarithme d'un produit n'est plus égal à la somme des logarithmes : exemple :

$$\ln(z_1 z_2) \neq \ln z_1 + \ln z_2$$

A regarder avec  $z_1 = z_2 = -1 + i$  et  $z_1 = -1 + i$  et  $z_2 = 1 + i$

- Il existe d'autres définitions du logarithme, ce sont simplement le même genre de logarithme sur un ouvert différent.

Ex : l'argument entre  $]0, 2\pi]$  s'écrit :  $\log_0$ . On place en fait la « coupure » en une autre demi-droite.

### 3.7.2 Définition de la puissance généralisée

$$\alpha \in \mathbb{C}, \quad z \in \Omega, \quad z^\alpha = e^{\alpha \text{Ln} z}$$

Attention à toujours retourner à la définition pour faire les calculs et à ne pas garder les « habitudes » des réels.

## 3.8 Formule intégrale de Cauchy

Soit  $f$  une fonction holomorphe dans  $\Omega$  et soit  $z_0 \in \Omega$ . Si  $0 < r < \text{dist}(z_0, \mathbb{C} \setminus \Omega)$  et si  $\gamma_r$  est le chemin  $\gamma_r(t) = z_0 + r e^{it}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ , alors

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} \frac{f(u)}{u - z} du = \begin{cases} f(z) & \text{si } |z - z_0| < r \\ 0 & \text{si } |z - z_0| > r \end{cases}$$

### 3.8.1 Preuve

Cas 1 :  $|z - z_0| > r$

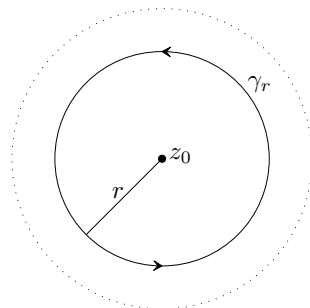


FIG. 3.2 – Le point  $z$  se trouve hors du cercle

La fonction  $u \mapsto \frac{f(u)}{u - z}$  est holomorphe dans  $\Omega \setminus \{z\}$ ; le chemin  $\gamma_r$  est homotope à un chemin constant ( $z_0$ ) dans  $\Omega \setminus \{z\}$ . Dès lors :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} \frac{f(u)}{u - z} du = 0$$



Cas 2 :  $|z - z_0| < r$

Soit  $\varepsilon > 0$  tel que  $\varepsilon < r - |z - z_0|$ ; posons  $\gamma_\varepsilon(t) = z + \varepsilon e^{it}$ ,  $t \in [0; 2\pi]$ . Les chemins  $\gamma_r$  et  $\gamma_\varepsilon$  sont homotopes dans  $\Omega \setminus \{z\}$  et la fonction  $u \mapsto \frac{f(u)}{u-z}$  est holomorphe dans  $\Omega \setminus \{z\}$ .

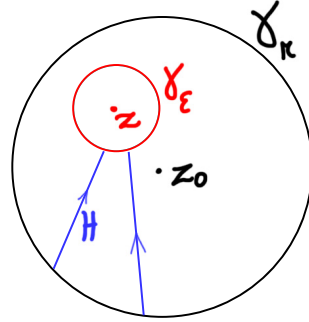


FIG. 3.3 – Le point  $z$  se trouve dans le cercle

Une fonction  $H$  donnant l'homotopie est la suivante

$$H(t, s) = (1 - s)\gamma_r(t) + s\gamma_\varepsilon(t); t \in [0; 2\pi], s \in [0, 1]$$

$$H : [0, 2\pi] \times [0, 1] \rightarrow \Omega \setminus \{z\}$$

Reste-t-elle dans  $\Omega$ ? Oui car la combinaison est convexe. Le segment qui joint les deux points de l'homotopie reste dans la boule, car la boule est dans  $\Omega$ .

Est-ce que cela passe par  $z$ ? Non, car quels que soient  $s$  et  $t$ , on a

$$\begin{aligned} H(t, s) - z &= (1 - s)\gamma_r(t) + s\gamma_\varepsilon(t) - z \\ &= (1 - s)(z_0 + re^{it}) + s(z + \varepsilon e^{it}) - z \\ &= e^{it}((1 - s)r + s\varepsilon) + (1 - s)z_0 + z(s - 1) \\ |H(t, s) - z| &= |e^{it}((1 - s)r + s\varepsilon) + (1 - s)z_0 + z(s - 1)| \\ &= |e^{it}((1 - s)r + s\varepsilon) + (1 - s)(z_0 - z)| \\ &\geq |(1 - s)r + s\varepsilon - (1 - s)|z - z_0|| \\ &\geq |(1 - s)(r - |z - z_0|) + s\varepsilon| \\ &\geq (1 - s)(r - |z - z_0|) + s\varepsilon \\ &\geq (1 - s)\varepsilon + s\varepsilon = \varepsilon \neq 0 \end{aligned}$$

car  $\varepsilon < r - |z - z_0|$  par hypothèse. Dès lors,

$$\int_{\gamma_r} \frac{f(u)}{u - z} du = \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(u)}{u - z} du = \int_0^{2\pi} \frac{f(z + \varepsilon e^{it})}{\varepsilon e^{it}} i\varepsilon e^{it} dt = i \int_0^{2\pi} f(z + \varepsilon e^{it}) dt$$

et (Lebesgue sur un compact)

$$\int_{\gamma_r} \frac{f(u)}{u - z} du = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(u)}{u - z} du = i \int_0^{2\pi} f(z) dt = 2\pi i f(z)$$

### 3.8.2 Conséquences de la formule d'intégration de Cauchy

#### Régularité et représentation des dérivées

Si  $f$  est holomorphe dans  $\Omega$ , alors

1.  $f$  est de classe  $C_\infty$  dans  $\Omega$  (par rapport à ses variables réelles)
2.  $Df$  est holomorphe dans  $\Omega$ ,  $D^2f$  est holomorphe dans  $\Omega$ , ... ,  $D^n f$  est holomorphe dans  $\Omega$ .
3. Si  $|z - z_0| < r$ ,  $0 < r < \text{dist}(z_0, \mathbb{C} \setminus \Omega)$ ,  $\gamma_r(t) = z_0 + re^{it}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ .

$$D^m f(z) = \frac{m!}{2i\pi} \int_{\gamma_r} \frac{f(u)}{(u-z)^{m+1}} du, \quad m \in \mathbb{N}$$

NB Le chemin d'intégration peut être bien sûr changé en utilisant le résultat d'invariance par homotopie qui peut être très utile dans les calculs d'intégrales.

Preuve

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} \frac{f(u)}{u-z} du = f(z) \quad \text{pour } |z - z_0| < r$$

Avec le théorème de dérivation des intégrales paramétriques, on pourra arriver à trouver facilement les dérivées de  $f$  en fonction de  $z$ . Avec  $\gamma_r(t) = z_0 + re^{it}$ ,  $z = (x, y) = x + iy$  ( $x$  et  $y$  réels), on a

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} \frac{f(u)}{u-z} du = \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})rie^{it}}{z_0 + re^{it} - z} dt$$

L'ensemble de variation des paramètres  $(x, y)$  est  $\Omega = b(z_0, < r)$

L'ensemble d'intégration :  $[0, 2\pi]$

On a

1.  $\forall t$  fixé

$$(x, y) \mapsto F(t, x, y) = \frac{f(z_0 + re^{it})rie^{it}}{z_0 + re^{it} - z} \in C_\infty(\Omega)$$

2.  $D_x F = \frac{f(z_0 + re^{it})rie^{it}}{(z_0 + re^{it} - (x + iy))^2}$ , il vient :

$$D_x^k F = \frac{f(z_0 + re^{it})rie^{it}}{(z_0 + re^{it} - (x + iy))^{k+1}} k!$$

$$D_y^{k'} F = \frac{f(z_0 + re^{it})rie^{it}}{(z_0 + re^{it} - (x + iy))^{k'+1}} k'! i^{k'}$$

Donc,

$$|D_x^k D_y^{k'} F| \leq \underbrace{\left| \frac{f(z_0 + re^{it})rC}{(z_0 + re^{it} - z)^{k+k'+1}} \right|}_{\text{Continue en } x, y, t} \leq C$$

si  $z = x + iy \in K \subset \Omega$ .

Les intégrales paramétriques donnent  $f$  de classe  $C_\infty$  dans  $\Omega$  et  $Df(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} \frac{f(u)}{(u-z)^2} du$ . Cette fonction  $z \mapsto Df$  est encore holomorphe dans  $\Omega$  car elle est  $C_\infty$  et (Cauchy Riemann) :

$$(D_x + iD_y) \int_{\gamma_r} \frac{f(u)}{(u-z)^2} du = \int_{\gamma_r} f(u) (D_x + iD_y) \frac{1}{(u-z)^2} du = 0$$

car  $\frac{1}{(u-z)^2}$  est holomorphe (en la variable  $z$ ).

## Théorème de Liouville

Si  $f$  est holomorphe dans  $\mathbb{C}$  (on dit que  $f$  est une fonction entière) et s'il existe  $N \in \mathbb{N}$ ,  $C > 0$  tels que :

$$|f(z)| \leq C(1 + |z|)^N \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

alors  $f$  est un polynôme de degré plus petit ou égal à  $N$ .

Preuve Soit  $z \in \mathbb{C}$ . Montrons que  $D^{N+1}f(z) = 0$ .

Pour tout  $r > 0$  tel que  $|z| < r$ , si  $\gamma_r(t) = re^{it}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ , on a

$$\begin{aligned} D^{N+1}f(z) &= \frac{(N+1)!}{2i\pi} \int_{\gamma_r} \frac{f(u)}{(u-z)^{N+2}} du \quad |z| < r \\ |D^{N+1}f(z)| &\leq \frac{(N+1)!}{2\pi} 2\pi r \sup_{|u|=r} \frac{|f(u)|}{|u-z|^{N+2}} \\ &\leq (N+1)!rC \frac{(1+r)^N}{(r-|z|)^{N+2}} \end{aligned}$$

Passons à la limite quand  $r \rightarrow +\infty$  (on peut le faire vu l'hypothèse sur  $f$ ) on a alors :  $|D^{N+1}f(z)| \leq 0$ . Donc  $D^{N+1}f(z) = 0$ .

Alors  $f$  est un polynôme de degré plus petit ou égal à  $N$  ?

Oui car on a les hypothèses adéquates sur  $f$  et

$$\begin{aligned} D^{N+1}f = 0 &= D(D^N f) = 0 \\ \Rightarrow D^N f &= \text{constante} = a_N \\ D^N f &= D(a_N z) \\ D(D^{N-1}f - a_N z) &= 0 \\ \Rightarrow D^{N-1}f - a_N z &= a_{N-1} \\ &\vdots \text{ (etc)} \end{aligned}$$

## Principe du maximum

- Si  $f$  est holomorphe dans  $\Omega$  connexe et si  $z_0 \in \Omega$  est tel que  $|f(z_0)| = \sup_{\Omega} |f|$ , alors  $f$  est constante dans  $\Omega$
- Si  $\Omega$  est un ouvert borné de  $\mathbb{C}$ , si  $f$  est holomorphe dans  $\Omega$  et continue dans  $\bar{\Omega}$ , alors  $\sup_{\bar{\Omega}} |f| = \sup_{\dot{\Omega}} |f|$

où  $\bar{\Omega}$  est l'adhérence de  $\Omega$  et  $\dot{\Omega}$  sa frontière (revoir la topologie).

## Théorème de Weierstrass

Si  $f_m$  est holomorphe dans  $\Omega$  quel que soit le naturel  $m$  et si  $\forall K$  compact  $\subset \Omega$  on a  $\sup_{z \in K} |f_m(z) - f(z)| \rightarrow 0$  (convergence uniforme des dérivées sur  $K$ ), alors  $f$  est holomorphe dans  $\Omega$  et

$$\sup_{z \in K} |D^k f_m(z) - D^k f(z)| \rightarrow 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}, \forall K \subset \Omega \text{ (compact)}$$

## 3.9 Séries de puissances, séries de Taylor

### 3.9.1 Définition

Une série de puissances est une série du type

$$S(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m (z - z_0)^m$$

avec  $a_m \in \mathbb{C} \quad \forall m \in \mathbb{N}, z_0 \in \mathbb{C}$  (constantes données)  $z \in \mathbb{C}$ .

*Etude de la convergence de  $S(z)$  et des propriétés de  $S$*

Si  $R > 0, C > 0$  sont tels que

$$\sup_m R^m |a_m| \leq C$$

alors :

1. la série  $S$  converge absolument et uniformément sur tout compact de la boule ouverte  $B = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$
2.  $S$  est holomorphe dans  $B = B(z_0, < R)$
3. On a  $\forall k \in \mathbb{N}_0$

$$D^k S(z) = \sum_{m=k}^{+\infty} m \cdot (m-1) \cdots (m-k+1) a_m (z - z_0)^{m-k}$$

Pour obtenir ce résultat, on utilise le théorème de Weierstrass dans le cas des séries ( $f_m = \sum_{m=1}^{+\infty} f_m$  converge uniformément sur tout compact de  $\Omega$  : on obtient que  $f = \sum_m f_m$  est holomorphe dans  $\Omega$ , et  $D^k f = \sum_m D^k f_m$  quel que soit le naturel  $k$ .)

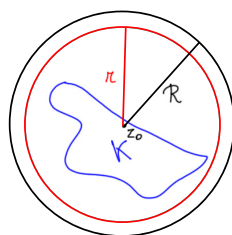


FIG. 3.4 –  $K \subset \{z : |z - z_0| \leq r\}$  avec  $r < R$

Application dans le cas des séries de puissances (dans ce cas, les  $f_m$  sont des polynômes) :  
 $\Omega = B(z_0, < R)$ ,  $f = S$   
 $K$  compact de  $\Omega$

$$\sup_{z \in K} \left| \sum_{m=p}^q a_m (z - z_0)^m \right| \rightarrow 0? \quad \text{si } p, q \rightarrow +\infty$$

$$\begin{aligned} \sup_{z \in K} \left| \sum_{m=p}^q a_m (z - z_0)^m \right| &\leq \sum_{m=p}^q |a_m| r^m \\ &= \sum_{m=p}^q |a_m| R^m \left(\frac{r}{R}\right)^m \\ &\leq C \sum_{m=p}^q \left(\frac{r}{R}\right)^m \rightarrow 0 \quad \text{si } p, q \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

### Remarques

- Si  $S$  converge en  $z_1 (\neq z_0)$  alors elle converge absolument et uniformément sur tout compact de  $B(z_0, < R_0)$  avec  $R_0 = |z - z_1|$ , elle est holomorphe et dérivable terme à terme dans  $B(z_0, < R_0)$ . (conséquence du point (1))
- Si  $S$  ne converge pas en  $z_2$  alors elle ne converge en aucun  $z$  tel que  $|z - z_0| > |z_0 - z_2|$

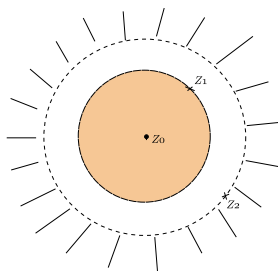


FIG. 3.5 -

### 3.9.2 Rayon de convergence, disque de convergence d'une série de puissances

On considère la série de puissances

$$S(z) = \sum_{m=0}^{+\infty} a_m (z - z_0)^m$$

On appelle boule (ou disque) ou encore domaine de convergence de  $S$  l'union de toutes les  $B(z_0, < R)$  où la série converge. Le rayon  $R_S$  (qui peut être nul ou infini) de ce disque est appelé rayon de convergence de la série  $S$ .

Ainsi, par définition,  $S(z)$  converge si  $|z - z_0| < R_S$  et diverge lorsque  $|z - z_0| > R_S$ .

NB : En toute généralité, on ne peut rien dire sur la convergence en  $z : |z - z_0| = R_S$ .

Calcul du rayon de convergence (un exemple de cas pratique)

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{m+1}}{a_m} \right| = 0 \Rightarrow R_S = +\infty$$

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{m+1}}{a_m} \right| = +\infty \Rightarrow R_S = 0$$

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{m+1}}{a_m} \right| = L^* \Rightarrow R_S = \frac{1}{L^*}$$

### 3.9.3 Développement de fonctions holomorphes en séries de puissances

On a vu qu'une série de puissances définissait une fonction holomorphe (dans une boule). Réciproquement, toute fonction holomorphe se développe de la sorte (mais il convient de préciser où l'égalité entre  $f$  et son développement a lieu).

Si  $f$  est holomorphe dans  $\Omega$  (ouvert de  $\mathbb{C}$ ) et si  $z_0 \in \Omega$ , on a :

$$f(z) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{D^m f(z_0)}{m!} (z - z_0)^m$$

pour tout  $z$  tq  $|z - z_0| < \text{dist}(z_0, \mathbb{C} \setminus \Omega) = r_0$

Remarques Vu le résultat précédent, ceci implique aussi que la convergence est absolue et uniforme dans tout compact de  $B(z_0, < r_0)$  et que la série est dérivable terme à terme.

Démonstration On fixe  $z$  tel que  $|z - z_0| < r_0$

Alors, si  $r > 0$  est tel que  $|z - z_0| < r < r_0$ , on a

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} \frac{f(u)}{u - z} du$$

avec  $\gamma_r(t) = z_0 + re^{it}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ .

Pour tout  $M \in \mathbb{N}_0$  on a

$$\frac{1}{u - z} = \frac{1}{u - z_0} \sum_{m=0}^{M-1} \left( \frac{z - z_0}{u - z_0} \right)^m + \frac{(z - z_0)^M}{(u - z) \cdot (u - z_0)^M}$$

car

$$\begin{aligned} \frac{1}{u - z_0} \sum_{m=0}^{M-1} \left( \frac{z - z_0}{u - z_0} \right)^m &= \frac{1 - \left( \frac{z - z_0}{u - z_0} \right)^M}{1 - \left( \frac{z - z_0}{u - z_0} \right)} \frac{1}{u - z_0} \\ &= \frac{1}{u - z} \left( 1 - \left( \frac{z - z_0}{u - z_0} \right)^M \right) \end{aligned}$$

Et il vient en remplaçant :

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \sum_{m=0}^{M-1} \int_{\gamma_r} f(u) \frac{(z - z_0)^m}{(u - z_0)^{m+1}} du + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} f(u) \frac{(z - z_0)^M}{(u - z)(u - z_0)^M} du$$

$$= \sum_{m=0}^{M-1} \frac{1}{m!} \underbrace{\frac{m!}{2i\pi} \int_{\gamma_r} \frac{f(u)}{(u-z_0)^{m+1}} du}_{D^m f(z_0)} (z-z_0)^m + \underbrace{\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} \frac{f(u)}{(u-z)} \frac{(z-z_0)^M}{(u-z_0)^M} du}_{=\text{reste}}$$

Le reste tend vers 0 si  $M \rightarrow \infty$  car :

$$\left| \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} \frac{f(u)}{(u-z)} \frac{(z-z_0)^M}{(u-z_0)^M} du \right| \leq \frac{1}{2\pi} 2\pi r \sup_{|u-z_0|=r} \left| \frac{f(u)}{u-z} \right| \cdot \left| \frac{z-z_0}{r} \right|^M$$

avec  $\left| \frac{z-z_0}{r} \right| < 1$ , donc  $\left| \frac{z-z_0}{r} \right|^M \rightarrow 0$  si  $M \rightarrow \infty$ .

### 3.9.4 Zéros des fonctions holomorphes

On appelle zéro d'une fonction holomorphe  $f$  tout  $z_0$  tel que  $f(z_0) = 0$ .

Un zéro est dit  $p$ -uple ( $p$  naturel  $> 0$ ) lorsque

$$D^m f(z_0) = 0 \quad \forall m = 0, \dots, p-1 \quad \& \quad D^p f(z_0) \neq 0$$

Un zéro est dit d'ordre infini lorsque :

$$D^m f(z_0) = 0 \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

#### Propriétés

1. Si  $f$  est holomorphe dans  $\Omega$ ,  $\Omega$  connexe, et si  $f$  possède un zéro d'ordre infini, alors  $f = 0$  dans  $\Omega$ .
2. Soit  $p \in \mathbb{N}_0$ . La fonction holomorphe possède  $z_0$  comme zéro  $p$ -uple si et seulement s'il existe  $h$ , holomorphe au voisinage de  $z_0$ , tel que

$$f(z) = (z-z_0)^p h(z) \quad \text{au voisinage de } z_0 \quad \& \quad h(z_0) \neq 0$$

Tout zéro  $p$ -uple est donc isolé.

3. Si  $f$  est holomorphe dans  $\Omega$  connexe, si  $z_m$  ( $m \in \mathbb{N}_0$ ) est une suite de zéros de  $f$ , distincts deux à deux, tels que  $z_m \rightarrow z_0 \in \Omega$  alors  $f = 0$  dans  $\Omega$ .

En particulier si  $f$  est holomorphe dans  $\Omega$  connexe s'annule dans un ouvert  $\omega \subset \Omega$  alors  $f$  est nulle dans  $\Omega$ .

#### Preuve des propriétés

1.  $z_0 \in \Omega$ ,  $D^m f(z_0) = 0 \quad \forall m$

$$E := \{z \in \Omega : D^m f(z) = 0 \forall m \in \mathbb{N}\}$$

$E \neq \emptyset$ ;  $E$  est fermé ( $E = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \{z \in \Omega : D^m f(z) = 0\}$ )

$E$  est ouvert ? Si il l'est alors  $E = \Omega$ .

Soit  $z_1 \in E$ ; montrer qu'il existe  $r_1 > 0$  tel que  $|z - z_1| < r_1 \Rightarrow z \in E$ . Taylor en  $z_1$  :

$$f(z) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{D^m f(z_1)}{m!} (z - z_1)^m = 0 \quad D^m f(z_1) = 0 \forall m$$

pour  $z : |z - z_1| < r_1 = \text{dist}(z_1, \mathbb{C} \setminus \Omega)$ .

Donc  $D^k f(z) = 0 \forall z : |z - z_1| < r_1 \quad \& \quad \forall k$

NB :  $\Omega$  ouvert connexe avec  $E \neq \emptyset$ ,  $E$  fermé,  $E$  ouvert  $\Rightarrow E = \Omega$ .

Sinon  $E, \Omega \setminus E$  deux ouverts  $\neq \emptyset$  d'union  $\Omega$ .<sup>2</sup>

2. Conséquence du développement de Taylor.

$\Rightarrow$  Soit  $z_0$  zéro p-uple de  $f$ . On a

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{D^m f(z_0)}{m!} (z - z_0)^m \quad \text{au voisinage de } z_0 \\ &= (z - z_0)^p \underbrace{\sum_{m=p}^{+\infty} \frac{D^m f(z_0)}{m!} (z - z_0)^{m-p}}_{\geq 0 \quad h(z)} \end{aligned}$$

avec  $h(z_0) \neq 0$  puisque la dérivé d'ordre  $p$  de  $f$  n'est pas nulle en  $z_0$ .

$\Leftarrow$

Soit  $f(z) = (z - z_0)^p h(z)$  au voisinage de  $z_0$  avec  $h$  holomorphe et  $h(z_0) \neq 0$

$D^k f(z_0) = 0$  si  $k = 0, \dots, p-1$

$D^p f(z_0) \neq 0$  si  $k = p$

Soit  $k \leq p-1$

$$D^k f(z_0) = \sum_{j=0}^k C_k^j D^j (z - z_0)^p|_{z_0} D^{k-j} h(z_0) = 0$$

Soit  $k = p$

$$D^p f(z_0) = \sum_{j=0}^p C_p^j D^j (z - z_0)^p|_{z_0} D^{p-j} h(z_0) = C_p^p D^p (z - z_0)^p|_{z_0} h(z_0) \neq 0$$

3.  $\underbrace{f(z_m)}_0 \rightarrow f(z_0)$  donc  $z_0$  est un zéro de  $f$ . Si  $z_0$  est d'ordre fini alors  $\exists r > 0 : f(z) \neq 0$  si  $0 < |z - z_0| < r$ . Mais comme on a une suite de zéros qui converge vers  $z_0$  il finissent par entrer dans la boule de rayon  $r$ , c'est donc absurde.  
Donc  $z_0$  est d'ordre infini. La fonction est donc nulle dans  $\Omega$ .

## 3.10 Théorème des résidus

### 3.10.1 Séries de Laurent

Si  $f$  est holomorphe dans  $\Omega \setminus \{z_0\}$  (c.à.d.  $z_0$  est une singularité isolée), on peut décrire complètement la structure de  $f$  au voisinage de  $z_0$ .

<sup>2</sup>L'étudiant, ici, fera attention à relire la notion d'ouvert et de fermé sachant qu'il faut savoir dans quel "espace" on les considère.



Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{C}$ , soit  $z_0 \in \Omega$  et soit  $f$  holomorphe dans  $\Omega \setminus \{z_0\}$ . Alors il existe un couple unique  $h, H$  de fonctions telles que

1.  $h$  holomorphe dans  $\Omega$
2.  $H$  holomorphe dans  $\mathbb{C}$  et  $H(0) = 0$ .
3.  $f(z) = h(z) + H\left(\frac{1}{z-z_0}\right); z \in \Omega \setminus \{z_0\}$

De plus, on a

$$h(z) = \sum_{m=0}^{+\infty} a_m (z - z_0)^m, |z - z_0| < r_0$$

$$H(z) = \sum_{m=1}^{+\infty} a_{-m} z^m, \quad z \in \mathbb{C}$$

avec  $r_0 = \text{dist}(z_0, \mathbb{C} \setminus \Omega)$ ,  $\gamma_r = z_0 + re^{it}$  avec  $t \in [0, 2\pi]$   $0 < r < r_0$

$$a_m = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} \frac{f(u)}{(u - z_0)^{m+1}} du \quad m \in \mathbb{Z}$$

### 3.10.2 Remarques

- Le théorème donne donc (au voisinage de  $z_0$  (pas en  $z_0$ ) si  $z_0$  est une singularité de  $f$ )

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m (z - z_0)^m \\ &= \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{a_{-m}}{(z - z_0)^m} + \sum_{m=0}^{+\infty} a_m (z - z_0)^m \end{aligned}$$

et on a aussi la forme explicite pour les  $a_m$  ( $m \in \mathbb{Z}$ ).

- Remarquons que lorsque  $f$  est holomorphe dans  $\Omega$ , alors on retrouve le développement de Taylor :

- si  $m \in \mathbb{N}$  alors

$$a_m = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} \frac{f(u)}{(u - z_0)^{m+1}} du = \frac{D^m f(z_0)}{m!}$$

- si  $(-m) \in \mathbb{N}_0$  alors

$$a_m = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} \underbrace{f(u) \cdot (u - z_0)^{-m-1}}_{\text{holomorphe dans } \Omega} du = 0$$

car pour  $m$  strictement négatif,  $-m - 1$  est positif, et le chemin est homotope à un chemin constant dans  $\Omega$ .

- Quand  $m = -1$

$$a_{-1} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} f(u) du = \text{coefficient de } \frac{1}{z - z_0} \text{ dans le développement de Laurent}$$

C'est ce que l'on appelle (voir plus loin) le **résidu** de  $f$  en la singularité isolée  $z_0$ .

### Exemples

1.  $f : z \mapsto e^{1/z}$  est holomorphe dans  $\mathbb{C}_0$  et le développement de Laurent en 0 est

$$f(z) = \sum_{m \geq 0} \frac{1}{m! z^m} = 1 + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m!} \cdot \frac{1}{z^m}$$

$$h(z) = 1 \text{ et } H(z) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{z^m}{m!} = e^z - 1$$

2.  $f : z \mapsto \frac{1}{z(z+1)}$  est holomorphe dans  $\mathbb{C} \setminus \{0, -1\}$  et on a

$$\frac{1}{z(z+1)} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1}$$

$z_0 = 0$  est une singularité isolée. De même que  $z_0 = -1$ .

Le développement de Laurent en 0 est donc

$$f(z) = -\frac{1}{z+1} + \frac{1}{z}; \quad H(z) = z \quad h(z) = -\frac{1}{z+1}$$

Et, le développement de Laurent en 1 vaut

$$f(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1}; \quad H(z) = -z \quad h(z) = \frac{1}{z}$$

Faites attention à l'identification de  $H$ .

3.  $f(z) = \sin(\frac{1}{z})$  est holomorphe dans  $\mathbb{C}_0$ . Développement de Laurent ?

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \sum_{m \geq 0} (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}$$

$$f(z) = \sum_{m \geq 0} (-1)^m \frac{1}{(2m+1)! z^{2m+1}}$$

$$h = 0 \text{ et } H(z) = \sin z$$

4. Où ces fonctions sont-elles holomorphes, quelles sont leurs singularités isolées ? Quel est leur résidu et le développement de Laurent (correspondant à chaque singularité isolée) ?

$$f_1(z) = \frac{1}{z^4 + 2z^2 + 1} \quad f_2(z) = e^{z+1/z} \quad f_3(z) = \frac{1}{z^4 + 1}$$

### 3.10.3 Démonstration du théorème de Laurent

Soit  $z \in \Omega$  tel que  $0 < |z - z_0| < r_0$ . On définit  $F$  dans  $\Omega \setminus \{z_0\}$  par :

$$F(u) = \begin{cases} \frac{f(u)-f(z)}{u-z} & \text{si } u \in \Omega \setminus \{z, z_0\} \\ Df(z) & \text{si } u = z \end{cases} \quad (*)$$

$F_z(u)$  est holomorphe dans  $\Omega \setminus \{z_0\}$ .

C'est clair pour l'ouvert  $\Omega \setminus \{z, z_0\}$ . Le principal problème se trouve en  $u = z$ .

Dans un voisinage de  $z$ , on a :

$$f(u) - f(z) = \int_0^1 D_t(f(z + t(u-z))) dt = (u-z) \cdot \int_0^1 (Df)_{z+t(u-z)} dt$$

Pour  $u = z$  on a  $F(u) = F(z) = Df(z) = \int_0^1 (Df)_{z+t(u-z)} dt$ . Dès lors

$$F(u) = \int_0^1 (Df)_{z+t(u-z)} dt \quad \text{au voisinage de } z$$

Le membre de droite étant l'intégrale (paramétrique) d'une fonction de  $u$  holomorphe en  $u$  au voisinage de  $z$ , donc en  $z$ , l'égalité nous garantit que  $F(u)$  est aussi holomorphe en  $z$ .

### Recherche des candidats $H$ et $h$

Soient  $r$  et  $\varepsilon$  tels que  $0 < \varepsilon < |z - z_0| < r < r_0$ , avec  $\gamma_r(t) = z_0 + re^{it}$  et  $\gamma_\varepsilon(t) = z_0 + \varepsilon e^{it}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ . Les chemins  $\gamma_r$  et  $\gamma_\varepsilon$  sont homotopes dans  $\Omega \setminus \{z_0\}$ , on a donc :

$$\int_{\gamma_r} F(u) du = \int_{\gamma_\varepsilon} F(u) du$$

Or,

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_r} F(u) du &= \int_{\gamma_r} \frac{f(u) - f(z)}{u - z} du \\ &= \int_{\gamma_r} \frac{f(u)}{u - z} du - f(z) \int_{\gamma_r} \frac{1}{u - z} du \end{aligned}$$

La représentation intégrale de Cauchy donne directement

$$\int_{\gamma_r} \frac{1}{u - z} du = 2i\pi$$

De plus,

$$\int_{\gamma_\varepsilon} F(u) du = \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(u) - f(z)}{u - z} du = \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(u)}{u - z} du - f(z) \underbrace{\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{1}{u - z} du}_{=0}$$

Comme on a,

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_r} F(u) du &= \int_{\gamma_\varepsilon} F(u) du \\ \int_{\gamma_r} \frac{f(u)}{u - z} du - f(z) \cdot 2i\pi &= \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(u)}{u - z} du \end{aligned}$$

Donc il vient,

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} \frac{f(u)}{u - z} du - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(u)}{u - z} du$$

### Examen de passage de $h$ et $H$

1. Définissons  $h$  dans  $B = \{z : |z - z_0| < \text{dist}(z, \mathbb{C} \setminus \Omega) = r_0\}$

Si  $z \in B$  avec  $r > 0$  tel que  $|z - z_0| < r < r_0$ ,  $\gamma_r(t) = z_0 + re^{it}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ , on a alors la fonction suivante, holomorphe dans  $B^3$  :

$$h(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} \frac{f(u)}{u - z} du$$

---

<sup>3</sup>Ce résultat est obtenu suite à la vérification de la relation de "Cauchy-Riemann" par dérivation sous le signe dûe aux intégrales paramétriques

De plus on a (par Taylor) :

$$h(z) = \sum_{m=0}^{+\infty} (z - z_0)^m \frac{D^m h(z_0)}{m!}, \quad |z - z_0| < r_0$$

Avec (intégrales paramétriques ok)

$$D^m h(z_0) = m! \underbrace{\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} \frac{f(u)}{(u - z_0)^{m+1}} du}_{a_m} \quad m \geq 0$$

2. Définissons  $H$  dans  $\mathbb{C}$

Soit :  $Z = \frac{1}{z - z_0} \Leftrightarrow \frac{1}{Z} = z - z_0 \Leftrightarrow z = z_0 + \frac{1}{Z}$ ,

Si  $0 < \varepsilon < |z - z_0| < r_0$  et  $\frac{1}{\varepsilon} > \frac{1}{|z - z_0|} = |Z|$ , le candidat  $H$

$$H(Z) = \frac{-1}{2i\pi} \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(u)}{u - z_0 - \frac{1}{Z}} du = \frac{Z}{2i\pi} \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(u)}{-Z(u - z_0) + 1} du$$

Définition de  $H : Z \in \mathbb{C}$ , avec  $|Z| < \frac{1}{\varepsilon}$  et  $\gamma_\varepsilon(t) = z_0 + \varepsilon e^{it}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$

$$H(z) = \frac{Z}{2i\pi} \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(u)}{1 - Z(u - z_0)} du$$

Par les intégrales paramétriques, cette fonction est holomorphe dans  $\mathbb{C}$  et nous avons  $H(0) = 0$ .

On applique Taylor puisque  $H$  est holomorphe dans  $\mathbb{C}$ ,

$$H(Z) = \sum_{m=1}^{+\infty} Z^m \frac{D^m H(0)}{m!} \quad \forall Z \in \mathbb{C}$$

$$\begin{aligned} D^m H(0) &= \frac{1}{2i\pi} \sum_{j=0}^m C_m^j D^j Z \Big|_{Z=0} D^{m-j} \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(u)}{1 - Z(u - z_0)} du \Big|_{Z=0} \\ &= \frac{m}{2i\pi} D^{m-1} \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(u)}{1 - Z(u - z_0)} du \Big|_{Z=0} \\ &= \frac{m}{2i\pi} \int_{\gamma_\varepsilon} (m-1)! \frac{f(u)}{1} (u - z_0)^{m-1} du \\ \frac{D^m H(0)}{m!} &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(u)}{(u - z_0)^{-m+1}} du = a_{-m} \end{aligned}$$

En considérant l'invariance par homotopie pour le résultat avec  $a_{-m}$ .

Unicité du développement de Laurent

Supposons que 2 couples répondent à la question :

$$f(z) = h_1(z) + H_1\left(\frac{1}{z - z_0}\right) = h_2(z) + H_2\left(\frac{1}{z - z_0}\right) \quad (*)$$

Pour  $z \in \Omega \setminus \{z_0\}$ . Montrons qu'ils sont égaux :  $h_1 = h_2$  et  $H_1 = H_2$ .

On définit :

$$F(z) = \begin{cases} h_1(z) - h_2(z) & z \in \Omega \\ H_2\left(\frac{1}{z - z_0}\right) - H_1\left(\frac{1}{z - z_0}\right), & z \in \mathbb{C} \setminus \{z_0\} \end{cases}$$

$F$  est bien définie vu  $*$ , donc elle définit une fonction entière (définie sur tout  $\mathbb{C}$ ).

$F$  est bornée dans  $\mathbb{C}$  :

- $F = h_1 - h_2$  dans  $\{z : |z - z_0| \leq r\}$  et y est borné
- $F = H_2(\frac{1}{z-z_0}) - H_1(\frac{1}{z-z_0})$  dans  $\mathbb{C}$  mais :  $Z = \frac{1}{z-z_0}$  est tel que  $|Z| < \frac{1}{r}$ . Il vient par continuité de  $F$  sur  $\mathbb{C}$  qu'elle y est bornée dans :  $\{Z : |Z| \leq \frac{1}{r}\}$ .

Comme  $F$  est bornée dans  $\mathbb{C}$ , holomorphe dans  $\mathbb{C}$ , elle est constante (théorème de Liouville). :  $F(z) = C$ .

Si  $z \neq z_0$ , pour  $z_m = z_0 + m$ ,  $m \in \mathbb{N}_0$ , on a

$$C = F(z) = H_2(\frac{1}{z-z_0}) - H_1(\frac{1}{z-z_0})$$

$$C = F(z_m) = H_2(\frac{1}{m}) - H_1(\frac{1}{m}) \longrightarrow 0 \text{ si } m \rightarrow +\infty$$

### 3.10.4 Pôles et singularité essentielles

Si  $z_0$  est une singularité isolée de  $f$  et si  $f$  est bornée dans un voisinage de  $z_0$  alors  $f$  se prolonge en une fonction holomorphe en  $z_0$ .

Preuve Le théorème de Laurent donne  $f(z) = h(z) + H(\frac{1}{z-z_0})$  au voisinage de  $z_0$  (sauf  $z_0$ ) avec  $h$  holomorphe en  $z_0$ . On obtient donc  $|H(\frac{1}{z-z_0})| \leq C$  pour  $0 < |z - z_0| < \delta$  donc  $|H(Z)| \leq C$  pour  $|Z| > \frac{1}{\delta}$ . Vu le théorème de Liouville et  $H(0) = 0$ , on obtient  $H = 0$ .

Remarque : Si  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \in \mathbb{C}$  alors  $f$  est bornée au voisinage de  $z_0$ .

- Si  $z_0$  est une singularité isolée de  $f$  on appelle la singularité  $z_0$  un pôle d'ordre  $p$  pour  $f$  si  $H(z)$  est un polynôme de degré  $p \in \mathbb{N}_0$ .
- dans le cas où  $H(z)$  est une série infinie (n'est pas un polynôme) on dit que la singularité  $z_0$  est une singularité essentielle.

Remarque le cas  $H$  polynôme de degré 0 correspond au cas où  $f$  se prolonge en une fonction holomorphe en  $z_0$ . On parle aussi de pôle d'ordre 0 dans ce cas.

#### Propriétés

1. Si  $p \in \mathbb{N}_0$  et si  $z \rightarrow (z - z_0)^p f(z)$  est borné au voisinage de  $z_0$  alors  $z_0$  est un pôle d'ordre  $p$  au plus. Si la limite n'est pas nulle, on a un pôle exactement d'ordre  $p$ .
2. Si  $p \in \mathbb{N}_0$  alors  $z_0$  est un pôle d'ordre  $p$  pour  $f$  si et seulement si  $\exists g$  holomorphe au voisinage de  $z_0$  (compris) tel que, au voisinage de  $z_0$ ,

$$g(z_0) \neq 0 \text{ et } f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^p}$$

#### Preuve

1. Est une généralisation de la propriété ci-dessus. Par le théorème de Laurent, on a

$$f(z) = h(z) + H(\frac{1}{z-z_0})$$

au voisinage de  $z_0$  (sauf en  $z_0$ ) donc

$$\underbrace{(z - z_0)^p f(z) - (z - z_0)^p h(z)}_{\text{Bornée dans } 0 < |z - z_0| < \delta} = (z - z_0)^p \cdot H\left(\frac{1}{z - z_0}\right)$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} |z - z_0|^p |H\left(\frac{1}{z - z_0}\right)| &\leq C \quad \text{pour } z : 0 < |z - z_0| < \delta \\ |H(Z)| &\leq C |Z|^p \quad \text{pour } |Z| > \frac{1}{\delta} \\ |H(Z)| &\leq C'(|Z|^p + 1) \quad \forall Z \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

Alors  $H$  est un polynôme de degré plus petit ou égal à  $p$  (Liouville).

De plus,  $z_0$  est un pôle d'ordre  $p$  exactement si et seulement si  $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^p f(z) \in \mathbb{C}_0$ .  
En effet

$$\begin{aligned} \Leftarrow (z - z_0)^p f(z) &= \underbrace{(z - z_0)^p h(z)}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\sum_{m=1}^p a_{-m} \frac{1}{(z - z_0)^m} (z - z_0)^p}_{\rightarrow a_{-p} \neq 0} \\ \Rightarrow f(z) &= h(z) + \sum_{m=1}^p a_{-m} \frac{1}{(z - z_0)^m} \\ \underbrace{(z - z_0)^p f(z)}_{\rightarrow \text{limite finie } \neq 0} &= \underbrace{(z - z_0)^p h(z)}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\sum_{m=1}^p a_{-m} \frac{1}{(z - z_0)^m} (z - z_0)^p}_{\rightarrow a_{-p}} \end{aligned}$$

2. D'une part, si  $z_0$  est un pôle d'ordre  $p$ , alors

$$\begin{aligned} f(z) &= h(z) + \sum_{m=1}^p a_{-m} \frac{1}{(z - z_0)^m} \\ &= h(z) + \frac{1}{(z - z_0)^p} \sum_{m=1}^p a_{-m} (z - z_0)^{-m+p} \\ &= \frac{(z - z_0)^p h(z) + \sum_{m=1}^p a_{-m} (z - z_0)^{p-m}}{(z - z_0)^p} \end{aligned}$$

le numérateur a bien les propriétés requises de  $g$ .

Réciproquement, si

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^p}$$

avec  $g$  holomorphe au voisinage de  $z_0$  et non nul en ce point, on a

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^p f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = g(z_0) \in \mathbb{C}_0$$

## Résumé au sujet des pôles et singularités essentielles

–  $p \in \mathbb{N}_0$ ,  $z_0$  est un pôle d'ordre  $p$

$$\Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^p f(z) \in \mathbb{C}_0$$

–  $z_0$  est un pôle d'ordre  $p \geq 1 \Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$

–  $z_0$  est une singularité essentielle  $\Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$  n'existe pas.

*Remarque :* Un complément d'information sur les pôles et singularités intitulé « A propos de la limite des valeurs d'une fonction holomorphe au voisinage d'une singularité isolée » est disponible sur le site <http://www.afo.ulg.ac.be/> sous la forme d'un ajout au cours du 13/11/07 et du 04/11/08.

### Preuve

– évident car démontré précédemment.

–  $\Rightarrow f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^p}$  donc  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$ .

$\Leftarrow$  on a  $|f(z)| \geq 1$  si  $0 < |z - z_0| < \delta$  donc  $\frac{1}{f}$  est holomorphe au voisinage de  $z_0$  (exclu).

$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{f(z)} = 0$  donc  $1/f$  se prolonge en une fonction holomorphe en  $z_0$ .

$$\frac{1}{f(z)} = (z - z_0)^\alpha g(z)$$

avec  $g(z_0) \neq 0$  et holomorphe au voisinage de  $z_0$ . Donc

$$f(z) = \frac{1/g(z)}{(z - z_0)^\alpha}$$

si  $\alpha$  est nul : on a un pôle d'ordre 0.

si  $\alpha \geq 1$  on a un pôle d'ordre  $p$  car  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$  (hypothèse).

–  $\Rightarrow$  Par l'absurde, on a deux cas si la limite existe :

1. soit  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$  est infinie, donc  $z_0$  est un pôle au vu du point (2) du résumé, ainsi  $z_0$  n'est pas une singularité essentielle.

2. soit  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$  est finie, c'est à dire  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \in \mathbb{C}$  alors  $f$  se prolonge en une fonction holomorphe en  $z_0$ , d'où  $z_0$  n'est pas une singularité.

$\Leftarrow$  Par l'absurde, si  $z_0$  n'est pas une singularité essentielle, alors c'est un pôle. C'est soit un pôle d'ordre 0 et on obtient que la fonction se prolonge en une fonction holomorphe en  $z_0 \rightarrow$  la limite est finie (absurde). Ou c'est un pôle d'ordre  $\geq 1$ , dans ce cas la limite est infinie par le point 2 (absurde).

### 3.10.5 Théorème des résidus

Ce résultat permet de calculer  $\int_\gamma f(z)dz$  lorsque  $\gamma$  est un chemin fermé qui n'entoure que des singularités isolées de  $f$  (en exprimant certaines intégrales "réelles" à partir d'intégrales  $\int_\gamma dz$  avec  $\gamma$  un chemin fermé). Ce résultat permet également de nombreuses utilisations dans le cadre de l'intégration au sens réel et dans le cadre de la sommation de séries.

### Définition

Si  $z_0$  est une singularité isolée de la fonction holomorphe  $f$ , on appelle résidu de  $f$  en  $z_0$  la valeur de l'intégrale :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} f(z) dz = \text{Res}_{z_0} f$$

où  $\gamma_r(t) = z_0 + re^{it}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ ,  $0 < r < \text{dist}(z_0, \mathbb{C} \setminus \Omega)$ .

### Théorème des résidus

Soient  $f$  holomorphe dans  $\Omega \setminus \{z_1, \dots, z_J\}$ ,  $\gamma$  un chemin fermé homotope à un chemin constant dans  $\Omega$  et ne passant pas par les points  $z_j$ , alors

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2i\pi \sum_{j=1}^J \text{Res}_{z_j} f I_{\gamma}(z_j)$$

où  $I_{\gamma}(z_j) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{dz}{z-z_j}$  où  $j = 1, \dots, J$ .

( $I_{\gamma}(z_j)$  est appelé indice de  $\gamma$  par rapport à  $z_j$ . L'indice compte le nombre de tours que  $\gamma$  fait autour de  $z_j$ .)

*Remarque*  $z_0 \in \Omega$ ,  $f$  holomorphe dans  $\Omega \setminus \{z_0\}$ ,  $0 < r < r_0 = \text{dist}(z_0, \mathbb{C} \setminus \Omega)$  et  $\gamma_r(t) = z_0 + re^{it}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ .

$$\text{Res}_{z_0} f = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} f(z) dz = a_{-1}$$

### Démonstration

$\forall j = 1, \dots, J$   $f(z) = h^{(j)}(z) + H^{(j)}\left(\frac{1}{z-z_j}\right)$  dans  $\Omega \setminus \{z_1, \dots, z_{j-1}, z_{j+1}, \dots, z_J\}$  par le théorème de Laurent. Cela étant, la fonction

$$F : z \mapsto f(z) - \sum_{j=1}^J H^{(j)}\left(\frac{1}{z-z_j}\right)$$

se prolonge en une fonction holomorphe dans  $\Omega$  car (analogue pour les autres singularités)

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_1} F(z) &= \lim_{z \rightarrow z_1} \left[ f(z) - \sum_{j=1}^J H^{(j)}\left(\frac{1}{z-z_j}\right) \right] \\ &= h^{(1)}(z_1) - \sum_{j=2}^J H^{(j)}\left(\frac{1}{z_1-z_j}\right) \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Donc  $\int_{\gamma} F(z) dz = 0$  (homotopie à un chemin constant).



Dès lors,

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \sum_{j=1}^J \int_{\gamma} H^{(j)} \left( \frac{1}{z - z_j} \right) dz \\ &= \sum_{j=1}^J \left( \int_{\gamma} \frac{a_{-1}^{(j)}}{z - z_j} dz + \underbrace{\int_{\gamma} \sum_{m \geq 2} \frac{a_{-m}^{(j)}}{(z - z_j)^m} dz}_{=0} \right) \\ &= \sum_{j=1}^J \int_{\gamma} \frac{a_{-1}^{(j)}}{z - z_j} dz \end{aligned}$$

car, on a

$$\frac{a_{-m}^{(j)}}{(z - z_j)^m} = \frac{a_{-m}^{(j)}}{1 - m} D \frac{1}{(z - z_j)^{m-1}}$$

pour  $m \geq 2$

$$\sum_{m \geq 2} \frac{a_{-m}^{(j)}}{(z - z_j)^m} = D \sum_{m \geq 2} a_{-m}^{(j)} \underbrace{\frac{1}{(1 - m)(z - z_j)^{m-1}}}_{F^{(j)}(z)} = \sum_{m \geq 2} a_{-m}^{(j)} DF^{(j)}(z)$$

avec

$$\int_{\gamma} DF^{(j)}(z) dz = F^{(j)}(\gamma(b)) - F^{(j)}(\gamma(a)) = 0$$

car  $\gamma$  est un chemin fermé.

L'indice...

Avec  $\gamma = z_j + e^{it}$ ,  $t \in [0, 4\pi]$  on a,

$$I_{\gamma}(z_j) = \frac{1}{2i\pi} \int_0^{4\pi} \frac{ie^{it}}{e^{it}} dt = \frac{4\pi}{\pi} = 2$$

Si on tourne dans le « mauvais sens » (sens horlogique), l'indice est un naturel négatif.

Si le chemin n'entoure pas la singularité, par déformation homotope à un chemin constant, on a une intégrale nulle.

## Les résidus

Si  $f$  est holomorphe dans  $\Omega \setminus \{z_0\}$ ,

$$Res_{z_0} f = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} f(z) dz$$

Propriétés

- Si on se réfère à la décomposition de Laurent :  $Res_{z_0} f = a_{-1} = DH(0)$
- Si  $z_0$  est un pôle d'ordre plus petit ou égal à  $p$  :

$$Res_{z_0} f = \frac{1}{(p-1)!} D^{p-1} \left( (z - z_0)^p f(z) \right) \Big|_{z=z_0}$$

Démonstration : on a

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{z_0} f &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} \frac{(z - z_0)^p f(z) dz}{(z - z_0)^p} = \frac{(p-1)!}{2i\pi(p-1)!} \int_{\gamma_r} \frac{(z - z_0)^p f(z)}{(z - z_0)^{p-1+1}} dz \\ &= \frac{1}{(p-1)!} D^{p-1} \left( (z - z_0)^p f(z) \right) \Big|_{z=z_0} \end{aligned}$$

En particulier, si  $f_1$  et  $f_2$  sont holomorphes au voisinage de  $z_0$  (y compris) et si  $z_0$  est un zéro simple (c.à.d. d'ordre un) de  $f_2$  alors :

$$\operatorname{Res}_{z_0} \frac{f_1}{f_2} = \frac{f_1(z_0)}{Df_2(z_0)}$$

Démonstration. Si  $f_1$  et  $f_2$  sont holomorphes au voisinage de  $z_0$  (y compris) et si  $z_0$  est un zéro simple (c.à.d. d'ordre un) de  $f_2$ , on a  $f(z) = \frac{f_1(z)}{f_2(z)} = \frac{f_1(z)}{(z-z_0)g_2(z)}$  qui implique que  $z_0$  est un pôle d'ordre  $\leq 1$  de  $f$ . Ainsi,

$$\operatorname{Res}_{z_0} \frac{f_1}{f_2} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \frac{f_1(z)}{f_2(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f_1(z)}{\frac{f_2(z) - f_2(z_0)}{z - z_0}} = \frac{f_1(z_0)}{Df_2(z_0)}$$

### Exemple

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}$$

- Sens de l'intégrale : ok
- Fonction paire :  $I = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{1+x^4}$  que nous allons "fermer - border" (il est nécessaire pour le théorème des résidus que  $\gamma$  soit fermé borné).  $I = \frac{1}{2} \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R \frac{dx}{1+x^4}$
- que nous immergeons dans le plan complexe :  $f(z) = \frac{1}{1+z^4}$  qui est holomorphe dans  $\mathbb{C} \setminus \{z_1, z_2, z_3, z_4\}$  avec  $z_k = e^{i\frac{\pi+2k\pi}{4}}$ , on a donc :  $z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}}$  ;  $z_2 = e^{i\frac{3\pi}{4}}$  ;  $z_3 = e^{i\frac{5\pi}{4}}$  ;  $z_4 = e^{i\frac{7\pi}{4}}$ . En considérant la demi-circonférence  $\mathcal{C}_R$ , soit  $\gamma_r$  la juxtaposition de  $\Gamma_R$  et de  $\mathcal{C}_R$ . On a alors,  $\gamma_r$  homotope à un chemin constant dans  $\mathbb{C}$  et  $f$  holomorphe dans  $\mathbb{C} \setminus \{z_1, z_2, z_3, z_4\}$ . Par le théorème des résidus :

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_r} f(z) dz &= 2i\pi(\operatorname{Res}_{z_0} f + \operatorname{Res}_{z_1} f) = 2i\pi\left(\frac{1}{4z_0^3} + \frac{1}{4z_1^3}\right) \\ &= 2i\pi\left(\frac{z_0}{-4} + \frac{z_1}{-4}\right) = \frac{-i\pi}{2}(e^{i\pi/4} + e^{3i\pi/4}) = -\frac{i\pi}{2}\left(2i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

On a donc

$$\frac{\pi\sqrt{2}}{2} = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_R} f(z) dz = \lim_{R \rightarrow +\infty} \left( \int_{\Gamma_R} f(z) dz + \int_{\mathcal{C}_R} f(z) dz \right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} + \underbrace{\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\mathcal{C}_R} f(z) dz}_{=0}$$

car :  $|\int_{\mathcal{C}_R} f(z) dz| \leq \frac{1}{R^4-1} \pi R \rightarrow 0 \quad R \rightarrow +\infty$  (le module de  $z$  sur  $\mathcal{C} = R$ )<sup>4</sup>. Dès lors,

$$I = \pi \frac{\sqrt{2}}{4}$$

<sup>4</sup>On a en effet,

$$||a| - |b|| \leq |a + b| \leq |a| + |b|$$

## 3.11 Résultats complémentaires

### 3.11.1 « Encoches »

#### Petites encoches

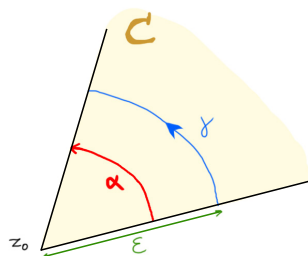


FIG. 3.6 – Petites encoches

Si  $f$  est continu dans un cône (partie bornée d cône) de sommet  $z_0$  (sauf en  $z_0$ ) si et  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \cdot (z - z_0) = A \in \mathbb{C}$ , alors

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\gamma_\varepsilon} f(z) dz = iA\alpha$$

NB : si  $z_0$  est un pôle d'ordre 1 alors  $A = \text{Res}_{z_0} f$ .

#### Grandes encoches

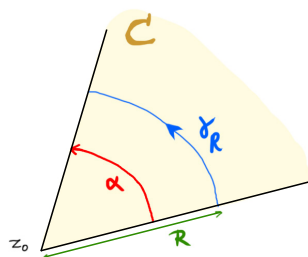


FIG. 3.7 – Grandes encoches

Si  $f$  est continu dans une partie de cône (complémentaire d'une partie bornée) et  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) \cdot (z - z_0) = A \in \mathbb{C}$ , alors

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} f(z) dz = iA\alpha$$

### 3.11.2 Lemme de Jordan

Si  $f$  est continue dans  $C$  (partie non bornée du cône) et  $\lim_{z \in \mathbb{C} \rightarrow \infty} f(z) = 0$ , alors

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_R} e^{az} f(z) dz = 0$$

Avec  $a$  « bien placé » par rapport à  $z_0$  (voir dessin).

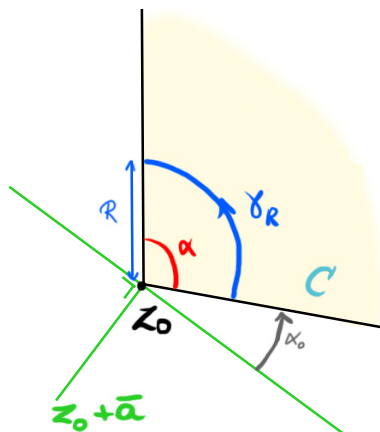


FIG. 3.8 – Jordan

### 3.11.3 Application dans les intégrales fléchées

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R \frac{\sin x}{x} dx = \pi/2$$

Soit  $R > 0$ , l'intégrale suivante :

$$\begin{aligned} \int_0^R \frac{\sin x}{x} dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^R \frac{\sin x}{x} dx \\ &= \frac{1}{2i} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left( \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{\varepsilon}^R \frac{e^{ix}}{x} dx \right) \end{aligned}$$

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

la fonction à intégrer :  $f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$  est holomorphe dans  $\mathbb{C}_0$  (0 est un pôle d'ordre 1).

On introduit les chemins suivants :  $\Gamma_-, \Gamma_+, \mathcal{C}_R, \mathcal{C}_\varepsilon$ , et on définit  $\gamma_{R,\varepsilon}$  la juxtaposition de ces 4 chemins.

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0 = \underbrace{\int_{\Gamma_-} f(z) dz + \int_{\Gamma_+} f(z) dz}_{\int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{\varepsilon}^R \frac{e^{ix}}{x} dx} + \int_{\mathcal{C}_R} f(z) dz + \int_{\mathcal{C}_\varepsilon} f(z) dz$$

Et on sait que, vu le résultat des petites encoches :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathcal{C}_\varepsilon} f(z) dz = i \cdot 1 \cdot (-\pi)$$

Par Jordan, avec  $z_0 = 0$ ,  $a = i$ , la position de Jordan est respectée.

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\mathcal{C}_R} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$$

Conclusion :

En passant à la limite pour  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ ,

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left( \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{\varepsilon}^R \frac{e^{ix}}{x} dx \right) + (-i\pi) + \int_{\mathcal{C}_R} f(z) dz \\ &= 2i \int_0^R \frac{\sin x}{x} dx - i\pi + \int_{\mathcal{C}_R} f(z) dz \end{aligned}$$

En passant à la limite pour  $R \rightarrow +\infty$ , on obtient le résultat annoncé

$$0 = 2i \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx - i\pi$$

### 3.11.4 Transformation de Laplace

NB : Références et applications : liste(s) d'exercices et E.K.

La transformation de Laplace unilatérale de  $f$  en  $p \in \mathbb{C}$

$$\mathcal{L}_p f = \int_0^{+\infty} e^{-px} f(x) dx$$

Pour  $p : x \mapsto f(x)e^{-px}$  intégrable sur  $]0, +\infty[$ .

**Propriétés :**

$$\mathcal{L}_p(Df) = \int_0^{+\infty} e^{-px} Df(x) dx = p\mathcal{L}_p f - f(0)$$

$$\mathcal{L}_p(D^2 f) = p^2 \mathcal{L}_p f - pf(0) - Df(0)$$

On peut donc résoudre des équations différentielles du genre :

$$aD^2 f + bDf + cf = g$$

Donne, si  $(Df(0) = 0, f(0) = 0)$

$$(ap^2 + pb + c)\mathcal{L}_p f = \mathcal{L}_p g \Leftrightarrow \mathcal{L}_p f = \frac{\mathcal{L}_p g}{ap^2 + pb + c}$$

Pour trouver la valeur de  $f$  il faut inverser la transformation de Laplace. On a pour cela la propriété suivante :

La fonction  $F$  définie par  $F(p) = \mathcal{L}_p f$  est holomorphe dans le demi-plan  $\{z \in \mathbb{C} : \Re z > a\}$  lorsque  $a = \inf\{r \in \mathbb{R} : e^{-rx} f(x) \in \mathbb{L}^1(]0, +\infty[)\}$  (+ le cas où  $a = -\infty$ ).

### 3.11.5 Application dans un cas particulier

$$F(z) = \frac{a}{z^2 + a^2}, \quad a > 0$$

On définit ( $x \in \mathbb{R}$ ) :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2i\pi} \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_R} e^{xz} F(z) dz \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{x(x_0+it)} F(x_0 + it) dt \end{aligned}$$

pour  $x_0 > 0$  fixé.

Alors

1. Cette définition a un sens d'un point de vue intégrabilité.
2. La définition est indépendante du point  $x_0 > 0$  choisi
3.  $f(x) = 0$  si  $x < 0$
4.  $f(x) = \sum_{j=1}^J \text{Res}_{z_j}(e^{xz} F(z))$ , ( $x_0 > 0$ ) où les  $z_j$  sont les pôles de  $F$ .
5.  $\int_0^{+\infty} e^{-zx} f(x) dx = F(z)$  dans le demi-plan  $\{z \in \mathbb{C} : \Re z > 0\}$

#### Démonstration

1. Intégrable car le module de l'intégrale est majoré par une constante.
2. Indépendante de  $x_0$  ?

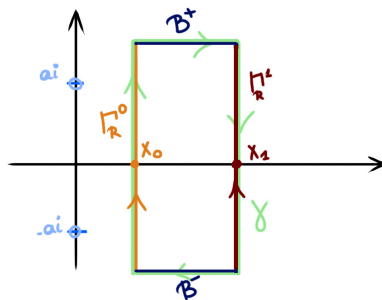


FIG. 3.9 – Indépendance par rapport à  $x_0$

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_R^0} e^{xz} F(z) dz = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_R^1} e^{xz} F(z) dz$$

Formons l'intégrale sur les chemins  $\Gamma_R^0$ ,  $B^+$ ,  $\Gamma_R^1$ ,  $B^-$  (juxtaposition notée  $\gamma$ ). Par homotopie, on a :

$$0 = \int_{\gamma} e^{xz} F(z) dz$$

Ainsi,

$$\int_{\Gamma_R^0} e^{xz} F(z) dz = \int_{\Gamma_R^1} e^{xz} F(z) dz + \underbrace{\int_{B^+} e^{xz} F(z) dz + \int_{B^-} e^{xz} F(z) dz}_{\rightarrow 0, R \rightarrow \infty}$$

Car, nous avons :

$$\begin{aligned} \left| \int_{B^+} e^{xz} F(z) dz \right| &= \left| \int_{x_0}^{x_1} e^{x(t+iR)} F(t+iR) dt \right| \\ &\leq \underbrace{C}_{e^t} \int_{x_0}^{x_1} |F(t+iR)| dt = C^* \int_{x_0}^{x_1} \frac{1}{|(t+iR)^2 + a^2|} dt \rightarrow 0 \end{aligned}$$

3.  $f(x) = 0$  si  $x < 0$  car

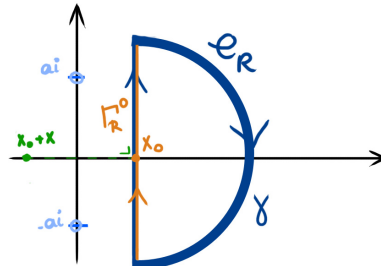


FIG. 3.10 – Si  $x < 0$

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi} \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_R} e^{xz} F(z) dz$$

Par homotopie à un chemin constant,

$$\int_{\Gamma_R} e^{xz} F(z) dz + \underbrace{\int_{C_R} e^{xz} F(z) dz}_{\rightarrow 0, R \rightarrow \infty (Jordan)} = 0$$

d'où  $f(x) = 0$ .

4.  $f(x) = \sum_{j=1}^J \text{Res}_{z_j}(e^{xz} F(z))$ , ( $x_0 > 0$ ) où les  $z_j$  sont les pôles de  $F$

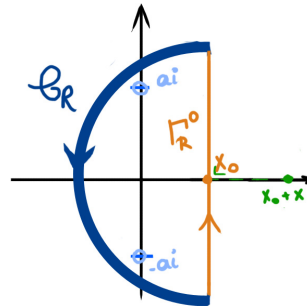


FIG. 3.11 – Si  $x > 0$

Par le théorème des résidus

$$\underbrace{\int_{\Gamma_R} e^{xz} F(z) dz}_{\rightarrow f(x) 2i\pi} + \underbrace{\int_{C_R} e^{xz} F(z) dz}_{\rightarrow 0, R \rightarrow \infty (Jordan)} = 2i\pi (\text{Res}_{ia}(e^{xz} F(z)) + \text{Res}_{-ia}(e^{xz} F(z)))$$

Et on a,

$$2i\pi[\text{Res}_{ia}(e^{zx}F(z)) + \text{Res}_{-ia}(e^{zx}F(z))] = \frac{e^{xia}a}{2ia} + \frac{e^{-xia}a}{-2ia} = \sin(ax)$$

5. Pour  $z > 0$  Réel!

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-zx} \sin(ax) dx &= \Im \left( \int_0^{+\infty} e^{zx} e^{iax} dx \right) \\ &= \Im \left( \int_0^{+\infty} e^{-x(z-ia)} dx \right) \\ &= \Im \frac{1}{z-ia} \\ &= \Im \frac{z+ia}{z^2+a^2} = \frac{a}{z^2+a^2} \end{aligned}$$

Donc,

$$\int_0^{+\infty} e^{-zx} f(x) dx = \frac{a}{z^2+a^2} = F(z)$$

Les deux fonctions sont holomorphes dans  $\Re z > 0$  et sont égales en une suite de points de l'ouvert qui converge, donc égales partout.

### Théorème général

On donne  $F$  holomorphe dans  $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \Re z > a\}$  telle que  $|F(z)| \leq \frac{C}{(1+|z|)^{1+\varepsilon}}$  pour  $z$  grand. ( $a, \varepsilon, C$  sont des réels,  $\varepsilon, C > 0$ ). Pour  $x_0 > a$ , on définit :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2i\pi} \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_R} e^{xz} F(z) dz \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{x(x_0+it)} F(x_0+it) dt \end{aligned}$$

Pour  $x_0 > 0$  fixé. On a alors :

1. La définition est indépendante du point  $x_0 > 0$  choisi
2.  $f(x) = 0$  si  $x < 0$
3.  $\mathcal{L}_p f = F(p)$ ,  $\Re p > x_0 > a$

Cas particulier où  $F$  est une fraction rationnelle :

$f$  est définie à partir de  $x_0 > \sup_{1 \leq j \leq J} \Re z_j$ , ( $z_1, \dots, z_J$ ) sont les pôles de  $F$ . Et on a,

$$f(x) = \sum_{j=1}^J \text{Res}_{z_j}(e^{zx}F(z)) \quad x > 0$$



### 3.11.6 Transformation conforme

Soient  $\Omega, V$  ouverts de  $\mathbb{C}$ . Une fonction  $f : \Omega \rightarrow V$  est dite conforme si elle est holomorphe et bijective.

#### Exemples de transformations conformes

- Les transformations conformes  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  sont des polynômes de degré 1. Ce qui peut s'écrire :

$$f \text{ est conforme} \Leftrightarrow \exists a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0 : f(z) = az + b, z \in \mathbb{C}$$

- Les transformations conformes qui associent à la boule unité ( $B = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ ) la boule unité sont exactement  $f = c\phi_a$  où  $a, c \in \mathbb{C}, |c| = 1, |a| < 1$  et  $\phi_a = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$
- La transformation de Joukowski est une transformation de la forme :

$$f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{a^2}{z}\right)$$

#### Propriétés principales des transformations conformes

- $f^{-1}$  est conforme.
- $Df$  ne s'annule pas.
- $f$  conserve les angles orientés.
- $f$  conserve les solutions de  $\Delta$
- Théorème de Riemann : si  $\Theta \neq \emptyset, \Theta \neq \mathbb{C}$  et  $\Theta$  simplement connexe, alors  $\Theta$  est conforme à la boule unité.

## Chapitre 4

# Introduction à l'analyse de Fourier

### 4.1 La transformée de Fourier dans $\mathbb{L}^1(\mathbb{R}^n)$

Soit  $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}^n)$ . La transformée de Fourier de  $f$  est la fonction définie dans  $\mathbb{R}^n$  par :

$$\hat{f}(y) = (\mathcal{F}f)y = \mathcal{F}_y f = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x,y \rangle} f(x) dx, \quad y \in \mathbb{R}^n$$

où  $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$ .

#### Remarque

- Au sujet des notations, on rencontre aussi :

$$\mathcal{F}_y^+ f = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x,y \rangle} f(x) dx = \mathcal{F}_{x \rightarrow y}^+ f(x)$$

$$\mathcal{F}_y^- f = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x,y \rangle} f(x) dx = \mathcal{F}_{x \rightarrow y}^- f(x)$$

- Au sujet de la définition : parfois on utilise un facteur  $2\pi$  (ou  $\sqrt{2\pi}$ ), c.à.d.  $2\pi \langle y, x \rangle$  ou  $(2\pi)^{n/2} \int$ . Selon la définition utilisée dans la littérature, l'intégrale a une valeur légèrement différente et les formules s'écrivent aussi de manière différente.
- $\mathcal{F}$  est une transformation linéaire.

#### Exemples pour $n = 1$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_y^\pm \chi_{]-a;a[} &= \int_{\mathbb{R}} e^{\pm ixy} \chi_{]-a;a[}(x) dx \\ &= \int_{-a}^a e^{\pm ixy} dx \\ &= 2 \int_0^a \underbrace{\cos(xy)}_{\frac{D_x \sin(xy)}{y}} dx = \begin{cases} 2a & \text{si } y = 0 \\ \frac{2 \sin(ay)}{y} & \text{si } y \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

On a aussi que la transformée d'une gaussienne est une gaussienne : pour  $a > 0$  et  $y \in \mathbb{R}$ , on a

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{x \rightarrow y}^\pm e^{-ax^2} &= \int_{\mathbb{R}} e^{\pm ixy} e^{-ax^2} dx \\ &= 2 \int_0^{+\infty} \cos(xy) e^{-ax^2} dx \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{y^2}{4a}}\end{aligned}$$

## 4.2 Théorème sur les Transformées de Fourier dans $\mathbb{L}^1$

Si  $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}^n)$  alors  $\mathcal{F}f$  est

- uniformément continue dans  $\mathbb{R}^n$
- bornée dans  $\mathbb{R}^n$
- tend vers 0 à l'infini

Démonstration (pour  $n = 1$ )

-  $y \in \mathbb{R}, h \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{y+h}f - \mathcal{F}_y f &= \int_{\mathbb{R}} (e^{-i(y+h)x} - e^{-iyx}) f(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} (e^{-ihx} - 1) f(x) dx\end{aligned}$$

Donc,

$$\sup_{y \in \mathbb{R}} |\mathcal{F}_{y+h}f - \mathcal{F}_y f| \leq \int_{\mathbb{R}} |e^{-ihx} - 1| \cdot |f(x)| dx$$

qui tend vers 0 si  $h \rightarrow 0$  par Lebesgue. La fonction est donc uniformément continue<sup>1</sup>.

-

$$\mathcal{F}_y f = \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} f(x) dx \quad y \in \mathbb{R}$$

donc

$$|\mathcal{F}_y f| \leq \underbrace{\int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx}_{\text{constante}}, \forall y$$

- Soit  $I = [a, b]$  (avec  $a, b$  réels,  $a < b$ ). Par calcul direct, on montre que

$$\mathcal{F}_y \chi_I = \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} \chi_I(x) dx = \int_a^b e^{-ixy} dx = \begin{cases} b - a & y = 0 \\ \frac{e^{-iyb} - e^{-iya}}{-iy} & y \neq 0 \end{cases}$$

<sup>1</sup>Rappel sur la continuité : Continuité d'une fonction  $g$  en  $x_0$  (de son domaine  $A$ )

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta : |x - x_0| \leq \eta \Rightarrow |g(x) - g(x_0)| \leq \varepsilon$$

Continuité uniforme de  $g$  sur  $A$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta : \forall x, y \in A : |x - y| \leq \eta : |g(x) - g(y)| \leq \varepsilon$$

D'où

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \mathcal{F}_y \chi_I = 0$$

Cas général :  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , soit  $\epsilon > 0$ . Comme  $f$  est intégrable, il existe une fonction étagée  $\alpha$  (c'est-à-dire une combinaison linéaire de fonctions caractéristiques du type de ci-dessus) telle que

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x) - \alpha(x)| dx \leq \frac{\epsilon}{2}$$

alors,

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}_y f| &= |\mathcal{F}_y f - \mathcal{F}_y \alpha + \mathcal{F}_y \alpha| = |\mathcal{F}_y(f - \alpha) + \mathcal{F}_y \alpha| \\ &\leq |\mathcal{F}_y(f - \alpha)| + |\mathcal{F}_y \alpha| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} |f(x) - \alpha(x)| dx + |\mathcal{F}_y \alpha| \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + |\mathcal{F}_y \alpha| \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\ &\leq \epsilon \end{aligned}$$

si  $|y|$  est grand.

#### 4.2.1 Propriétés générales

– si  $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$ , si  $a \in \mathbb{R}_0, b \in \mathbb{R}$ , alors

$$\mathcal{F}_{x \rightarrow y} f(ax + b) = \frac{1}{|a|} e^{\frac{iyb}{a}} \mathcal{F}_{y/a} f$$

– si  $f \in C_L(\mathbb{R})$  et  $D^l f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}) (l = 0, \dots, L)$  alors :

$$\mathcal{F}_y(D^l f) = (iy)^l \mathcal{F}_y f \quad (l = 0, \dots, L)$$

– si  $x^l f(x), x \in \mathbb{R}$  est intégrable  $\forall l = 0, \dots, L$ , alors :

$$\mathcal{F} f \in C_L(\mathbb{R}) \text{ et } D_y^l \mathcal{F}_y f = (-i)^l \mathcal{F}_{x \rightarrow y}(x^l f(x))$$

#### Démonstration

1.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{x \rightarrow y}^- f(ax + b) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-iyx} f(\underbrace{ax + b}_u) dx \\ &= \frac{1}{|a|} \int_{\mathbb{R}} e^{-iy \frac{u-b}{a}} f(u) du \\ &= \frac{1}{|a|} e^{\frac{iyb}{a}} \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{-iyu}{a}} f(u) du \end{aligned}$$

2.  $L = 1$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_y(Df) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} D_x f(x) dx \\ &= [e^{-ixy} f(x)]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{\mathbb{R}} (-iy) e^{-ixy} f(x) dx \\ &= iy \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} f(x) dx = (iy) \mathcal{F}_y^- f\end{aligned}$$

3. Par les intégrales paramétriques, avec l'ensemble d'intégration  $= \mathbb{R}$  et l'ensemble de variation du paramètre  $= \mathbb{R}$ ,

$$\mathcal{F}_y^- f = \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} f(x) dx$$

On vérifie les hypothèses :

- (a) pour tout point  $x$ ,  $y \mapsto e^{-ixy} f(x)$  est de classe  $C_\infty$  dans  $\mathbb{R}$ .
- (b)  $y$  fixé,  $e^{-ixy} f(x)$  et  $(-ix)e^{-ixy} f(x)$  sont intégrables (par rapport à  $x$ ) sur  $\mathbb{R}$
- (c)  $K \subset \mathbb{R}$  compact ;

$$\sup_{y \in K} |x e^{-ixy} f(x)| \leq |x f(x)|$$

Donc,  $\mathcal{F}_y^- f \in C_1(\mathbb{R})$  et

$$\begin{aligned}D_y \mathcal{F}_y^- f &= \int_{\mathbb{R}} D_y e^{-ixy} f(x) dx \\ &= (-i) \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} x f(x) dx\end{aligned}$$

#### 4.2.2 Propriété de transfert

Si  $f, g \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}^n)$  alors

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}_y^\pm f \cdot g(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \cdot \mathcal{F}_y^\pm g dy$$

*Démonstration* En appliquant le théorème de Tonelli-Fubini, on a successivement

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}_y^\pm f \cdot g(y) dy &= \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}^n} e^{\pm ixy} f(x) dx \right) g(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}^n} e^{\pm ixy} g(y) dy \right) f(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}_x^\pm g \cdot f(x) dx.\end{aligned}$$

### 4.3 Théorème de Fourier

Si  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  et si  $\mathcal{F}^\mp f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  alors

$$\mathcal{F}^\pm \mathcal{F}^\mp f = (2\pi)^n f$$

presque partout dans  $\mathbb{R}^n$

*Démonstration* Effectuons cette preuve dans le cas  $n = 1$  et  $f$  borné.

Par la propriété relative à la transformation de Fourier et aux translations et par le théorème de Lebesgue, on a

$$\mathcal{F}_y^+ \mathcal{F}^- f = \int_{\mathbb{R}} e^{ixy} \mathcal{F}_x^- f dx = \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\mathcal{F}_{t \rightarrow x}^- f(t+y)}_{\mathcal{F}_x^- f(\cdot+y)} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} e^{-\varepsilon x^2} \mathcal{F}_x^- f(\cdot+y) dx$$

puis, par le théorème de transfert :

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}_{x \rightarrow t}^- e^{-\varepsilon x^2} f(t+y) dt$$

ensuite, vu les propriétés des transformées de Fourier d'une gaussienne,

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}} e^{-\frac{t^2}{4\varepsilon}} f(t+y) dt$$

ensuite, par le changement de variable  $\frac{t}{2\sqrt{\varepsilon}} = u$ , dont le jacobien vaut  $2\sqrt{\varepsilon}$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} 2\sqrt{\varepsilon} \sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}} e^{-u^2} f(2\sqrt{\varepsilon}u + y) du$$

et enfin, par Lebesgue<sup>2</sup> et par Poisson, en tout  $y$  où  $f$  est continu,

$$= 2\sqrt{\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-u^2} \underset{=\sqrt{\pi}}{du} f(y) = 2\pi f(y)$$

### 4.4 Espace vectoriel complexe, normé, de Hilbert

Soit  $E$  un espace vectoriel complexe.

– Une norme sur  $E$  est une fonction  $\|\cdot\| : E \rightarrow [0, +\infty[$  telle que :

$$\|e\| = 0 \Leftrightarrow e = 0$$

$$\|e + f\| \leq \|e\| + \|f\| \quad \forall f, e \in E$$

$$\|ce\| = |c| \|e\| \quad \forall e \in E, \forall c \in \mathbb{C}$$

Exemples de normes

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$$

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| dx$$

<sup>2</sup>  $f$  est borné et  $e^{-u^2}$  est intégrable et ne dépend pas de  $\varepsilon$

- Un produit scalaire sur  $E$  est une fonction  $\langle \cdot, \cdot \rangle: E \times E \rightarrow \mathbb{C}$  telle que :
  - $\langle e + f, g \rangle = \langle e, g \rangle + \langle f, g \rangle$      $\langle ce, g \rangle = c \langle e, g \rangle$      $\forall e, f, g \in E$  et  $c \in \mathbb{C}$
  - $\langle f, g \rangle = \overline{\langle g, f \rangle}$      $\forall f, g \in E$
  - $\langle f, f \rangle \geq 0$      $\forall f \in E$      $\langle f, f \rangle = 0 \Leftrightarrow f = 0$
- Propriété Si  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est un produit scalaire sur  $E$  alors la fonction  $\|\cdot\|$  définie par  $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$  est une norme sur  $E$  et on a l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \|g\| \quad \forall f, g \in E$$

- Si  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est un produit scalaire sur  $E$ , on dit que  $E$  est pré-hilbertien. On définit alors une topologie sur  $E$  (ouverts, fermés, ...) en utilisant la norme associée à  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Lorsque les suites de Cauchy de cet espace sont convergentes, on dit que  $E$  est complet ou plus précisément ici, on dit que  $E$  est un espace de Hilbert.

#### 4.4.1 Propriétés d'un espace vectoriel complexe de Hilbert

Soient les suites  $f_m (m \in \mathbb{N})$  et  $g_m (m \in \mathbb{N})$  qui convergent respectivement vers  $f$  et  $g$  dans  $E$ .  
Alors

$$\|f_m\| \rightarrow \|f\| \quad \text{et} \quad \langle f_m, g_m \rangle \rightarrow \langle f, g \rangle$$

Démonstration On a

$$|\|f_m\| - \|f\|| \leq \|f_m - f\| \quad \forall m$$

donc on obtient directement la première partie de la propriété.

Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned} \langle f_m, g_m \rangle - \langle f, g \rangle &= \langle f_m - f, g_m \rangle + \langle f, g_m \rangle - \langle f, g \rangle \\ &= \langle f_m - f, g_m \rangle + \langle f, g_m - g \rangle \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} |\langle f_m, g_m \rangle - \langle f, g \rangle| &\leq |\langle f_m - f, g_m \rangle| + |\langle f, g_m - g \rangle| \\ &\leq \|f_m - f\| \cdot \|g_m\| + \|f\| \cdot \|g_m - g\| \\ &\leq C \|f_m - f\| + \|f\| \cdot \|g_m - g\| \end{aligned}$$

d'où : ok.

Exemples d'espaces de Hilbert :  $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n, \dots, \mathbb{L}^2(A)$  où  $A$  = partie mesurable de  $\mathbb{R}^n$  (voir suite).

#### 4.4.2 $\mathbb{L}^2$

Soit  $A$  une partie mesurable de  $\mathbb{R}^n$

$$\mathbb{L}^2(A) = \{f \text{ mesurable sur } A : |f|^2 \in \mathbb{L}^1\}$$

On définit si  $f, g \in \mathbb{L}^2$ ,

$$\langle f, g \rangle = \int_A f(x) \overline{g(x)} dx$$

$$\|f\| = \sqrt{\int_A |f(x)|^2 dx}$$

Ces définitions répondent bien à nos exigences sur la norme et le produit scalaire.

On démontre que l'espace  $\mathbb{L}^2(A)$  est un espace de Hilbert.

NB :  $|f(x)\overline{g(x)}|$  est intégrable car majoré par  $\frac{1}{2}(|f(x)|^2 + |g(x)|^2)$

#### Propriétés de $\mathbb{L}^2(A)$

Remarque : Tout ceci pourrait se faire dans un espace de Hilbert (et même pré-hilbert) tout à fait général.

Définition

$f, g \in \mathbb{L}^2(A)$

– sont orthogonaux si  $\langle f, g \rangle = \int_A f(x) \overline{g(x)} dx = 0$

–  $f \in \mathbb{L}^2(A)$  est dit normé si  $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = 1$

–  $f, g \in \mathbb{L}^2(A)$  sont dit orthonormés s'ils sont orthogonaux et normés.

#### Pythagore Généralisé

Soient

$$\begin{cases} u_1, \dots, u_J \in \mathbb{L}^2(A) \text{ orthogonaux 2 à 2} \\ c_1, \dots, c_J \in \mathbb{C} \end{cases}$$

Alors,

$$\left\| \sum_{j=1}^J c_j u_j \right\|^2 = \sum_{j=1}^J |c_j|^2 \|u_j\|^2$$

Dans le cas d'une infinité d'éléments de l'espace de Hilbert, on a un résultat analogue (ici, on utilise alors la convergence et le fait que l'espace est complet.)



Soient

$$\begin{cases} u_m & (m \in \mathbb{N}_0) \text{ une suite d'éléments de } \mathbb{L}^2(A), \text{ orthogonaux 2 à 2} \\ c_m & (m \in \mathbb{N}_0) \text{ une suite de complexes} \end{cases}$$

Alors la série  $\sum_{m=1}^{+\infty} c_m u_m$  converge dans  $\mathbb{L}^2(A) \Leftrightarrow$  la série  $\sum_{m=1}^{+\infty} |c_m|^2 \|u_m\|^2$  converge dans  $\mathbb{R}$ .  
Dans ce cas, on a aussi

$$\left\| \sum_{m=1}^{+\infty} c_m u_m \right\|^2 = \sum_{m=1}^{+\infty} |c_m|^2 \|u_m\|^2$$

Démonstration Pour la première partie,

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j=1}^J c_j u_j \right\|^2 &= \left\langle \sum_{j=1}^J c_j u_j, \sum_{k=1}^J c_k u_k \right\rangle \\ &= \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^J c_j \bar{c}_k \underbrace{\langle u_j, u_k \rangle}_{0 \text{ si } j \neq k} = \sum_{j=1}^J |c_j|^2 \|u_j\|^2 \end{aligned}$$

Dans le cas des séries, on doit être plus prudent (tronçons de Cauchy) :

$$\left\| \sum_{m=p}^q c_m u_m \right\|^2 = \sum_{m=p}^q |c_m|^2 \|u_m\|^2$$

### Projection orthogonale généralisée

Soit  $f \in \mathbb{L}^2(A)$  et soit  $u_m (m \in \mathbb{N}_0)$  une suite orthonormée de l'espace  $\mathbb{L}^2(A)$ . Alors il existe des coefficients  $c_m (m \in \mathbb{N}_0)$  et  $g \in \mathbb{L}^2(A)$  uniques tels que :

$$\begin{cases} \langle g, u_m \rangle = 0 \quad \forall m \\ f = g + \sum_{m=1}^{+\infty} c_m u_m, \quad \sum_{m=1}^{+\infty} |c_m|^2 \text{ converge} \end{cases}$$

On a en fait  $c_m = \langle f, u_m \rangle$  et aussi  $\|f\|^2 = \|g\|^2 + \sum_{m=1}^{+\infty} |\langle f, u_m \rangle|^2$ .

Donc

$$\|f\|^2 \geq \sum_{m=1}^{+\infty} |\langle f, u_m \rangle|^2$$

appelée inégalité de Bessel.

Preuve

– Unicité : soient  $c_m, g$  &  $c'_m, g'$  répondant à la thèse. Alors,  $\forall m_0$ , on a

$$\begin{aligned} \langle f, u_{m_0} \rangle &= \langle g, u_{m_0} \rangle + \sum_{m=1}^{+\infty} c_m \delta_{mm_0} = c_{m_0} \\ &= \langle g', u_{m_0} \rangle + \sum_{m=1}^{+\infty} c'_m \delta_{mm_0} = c'_{m_0} \end{aligned}$$

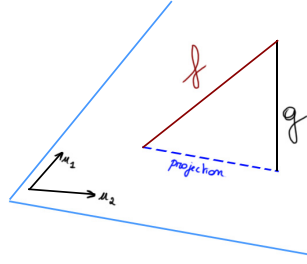


FIG. 4.1 – Projection orthogonale généralisée

$$g = f - \sum_{m=1}^{+\infty} c_m u_m = f - \sum_{m=1}^{+\infty} c'_m u_m = g'$$

– Existence : Posons  $c_m = \langle f, u_m \rangle$   $m \in \mathbb{N}_0$  et

$$(*) \quad g_M = f - \sum_{m=1}^M \langle f, u_m \rangle u_m \quad M \in \mathbb{N}_0$$

On a  $\langle g_M, u_m \rangle = 0$  si  $m \leq M$  car :

$$\begin{aligned} \langle g_M, u_m \rangle &= \left\langle f - \sum_{k=1}^M \langle f, u_k \rangle u_k, u_m \right\rangle = \langle f, u_m \rangle - \sum_{k=1}^M \langle f, u_k \rangle \underbrace{\langle u_k, u_m \rangle}_{\delta_{km}} \\ &= \langle f, u_m \rangle - \langle f, u_m \rangle \end{aligned}$$

Donc par Pythagore généralisé :

$$\begin{aligned} \|f\|^2 &= \left\| g_M + \sum_{m=1}^M \langle f, u_m \rangle u_m \right\|^2 \\ &= \|g_M\|^2 + \sum_{m=1}^M |\langle f, u_m \rangle|^2 \geq \sum_{m=1}^M \underbrace{|\langle f, u_m \rangle|^2}_{|c_m|^2} \quad \forall M \end{aligned}$$

Ainsi, la suite  $\sum_{m=1}^M c_m u_m$  ( $M \in \mathbb{N}_0$ ) converge dans  $\mathbb{L}^2(A)$  et (voir sa définition) la suite  $g_M$  ( $M \in \mathbb{N}_0$ ) converge aussi. Notons  $g$  sa limite. Vu (\*), on a

$$f = g + \sum_{m=1}^{+\infty} c_m u_m$$

et

$$\langle g, u_{m_0} \rangle = \lim_{M \rightarrow +\infty} \langle g_M, u_{m_0} \rangle = 0 \quad \forall m_0$$

### Suite orthonormée totale de fonctions de $\mathbb{L}^2(A)$

Une suite orthonormée  $u_m$  ( $m \in \mathbb{N}_0$ ) de  $\mathbb{L}^2(A)$  est dite totale lorsque

$$(f \in \mathbb{L}^2(A) \text{ et } \langle f, u_m \rangle = 0 \forall m) \Rightarrow f = 0$$

Caractérisation : La suite  $u_m$  ( $m \in \mathbb{N}_0$ ) est totale

$$\Leftrightarrow \forall f \in \mathbb{L}^2, \forall \varepsilon > 0 \quad \exists c_1, \dots, c_M \in \mathbb{C} : \left\| \sum_{m=1}^M c_m u_m - f \right\| < \varepsilon$$

Conséquences dans la projection orthogonale généralisée

Soit  $u_m$  ( $m \in \mathbb{N}_0$ ) une suite orthonormée totale de  $\mathbb{L}^2(A)$ . Alors,  $\forall f, g \in \mathbb{L}^2(A)$ , on a

$$f = \sum_{m=1}^{+\infty} \langle f, u_m \rangle u_m \quad \text{dans } \mathbb{L}^2(A)$$

$$\langle f, g \rangle = \sum_{m=1}^{+\infty} \langle f, u_m \rangle \overline{\langle g, u_m \rangle} \quad \text{dans } \mathbb{C}$$

Remarques

1. En particulier,  $\|f\|^2 = \sum_{m=1}^{+\infty} |\langle f, u_m \rangle|^2$ .
2. Cela est valable dans un espace de Hilbert général.
3. Cela généralise la notion de base orthonormée d'un espace de dimension finie.

## 4.5 Développement en série trigonométrique de Fourier

On considère le cas  $n = 1$ .

Soit  $\mathbb{L}^2([a, b])$  avec  $a, b$  réels,  $a < b$ . On va prouver le résultat suivant :

Les fonctions

$$u_m(x) = \frac{1}{\sqrt{b-a}} e^{\frac{2i\pi mx}{b-a}}, \quad m \in \mathbb{Z}$$

forment une suite orthonormée totale dans  $\mathbb{L}^2([a, b])$

Autres possibilités Les fonctions suivantes forment aussi une suite orthonormée totale dans  $\mathbb{L}^2([a, b])$

$$f_0(x) = \frac{1}{\sqrt{b-a}}, \quad f_m(x) = \sqrt{\frac{2}{b-a}} \cos\left(\frac{2\pi mx}{b-a}\right)$$

$$g_m(x) = \sqrt{\frac{2}{b-a}} \sin\left(\frac{2\pi mx}{b-a}\right) \quad m \in \mathbb{N}_0$$

forment une suite orthonormée totale dans  $\mathbb{L}^2([a, b])$  (c'est pour qu'elle soit normée que des  $\sqrt{2}$  apparaissent).

### Démonstration

Les fonctions sont orthonormées :

Rappel  $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx$  et  $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \left( \int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}$

On a :

$$\|u_m\| = \left( \int \frac{1}{b-a} \cdot 1 \right)^{1/2} = 1 \quad \forall m$$

$$\langle u_m, u_k \rangle = \int_a^b e^{\frac{2i\pi mx}{b-a}} \cdot e^{-\frac{2i\pi kx}{b-a}} dx \frac{1}{b-a} \quad (m \neq k)$$

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b \underbrace{e^{\frac{2i\pi x}{b-a}(m-k)}}_{D e^{\frac{2i\pi x}{b-a}(m-k)}} dx = \left[ \frac{1}{2i\pi(m-k)} e^{\frac{2i\pi x}{b-a}(m-k)} \right]_a^b = 0$$

### Totalité

Les personnes intéressées par la démonstration de la totalité des suites de Fourier se référeront aux notes complémentaires de Mme Bastin (disponibles en annexe) ou à la littérature générale sur ce sujet.

### 4.5.1 Exemples



FIG. 4.2 -  $f(x) = \frac{\pi-x}{2}$

Développer

$$f(x) = \frac{\pi - x}{2}$$

en série trigonométrique de Fourier dans  $\mathbb{L}^2([0, 2\pi])$  et en déduire que

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

On a  $f \in \mathbb{L}^2([0, 2\pi])$ ,

$$u_m(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{2i\pi mx}{2\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{imx}, \quad m \in \mathbb{Z}$$

$$\langle f, u_0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} \frac{\pi - x}{2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{u}{2} du = 0$$

et, pour  $m \neq 0$ ,

$$\langle f, u_m \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} \frac{\pi - x}{2} e^{-imx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ \frac{\pi - x}{2} \frac{e^{-imx}}{-im} \right]_0^{2\pi} + 0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{-2im} (-\pi - \pi) = \frac{\pi}{\sqrt{2\pi} im}$$

Le développement dans  $\mathbb{L}^2([0, 2\pi])$  est donc

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\pi}{\sqrt{2\pi} im} \cdot \frac{e^{imx}}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{m=-\infty}^{-1} \frac{\pi}{\sqrt{2\pi} im} \frac{e^{imx}}{\sqrt{2\pi}} = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\pi}{2\pi im} (e^{imx} - e^{-imx}) \\ &= \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\sin(mx)}{m} \end{aligned}$$

On a aussi

$$\|f\|^2 = 2 \sum_{m=1}^{+\infty} |\langle f, u_m \rangle|^2 = 2 \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\pi^2}{2\pi m^2} = \pi \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^2}$$

et (par définition de la norme)

$$\|f\|^2 = \int_0^{2\pi} \left( \frac{\pi - x}{2} \right)^2 dx = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} (\pi - x)^2 dx = \frac{1}{12} (\pi^3 + \pi^3) = \frac{\pi^3}{6}$$

## Annexe A

# Complément au chapitre 4 : Les séries de Fourier

Analyse II, Ajout aux transparents, 2007-2008

FB, 7 mai 2011(V1 : 21-11-06)

---

Introduction à l'analyse de Fourier  
AJOUT AUX TRANSPARENTS (cours du mardi 11 décembre 2007)

---

Si  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$  et si  $m \in \mathbb{Z}$ , on pose

$$u_m(x) = \frac{1}{\sqrt{b-a}} e^{\frac{2i\pi mx}{b-a}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Si  $f \in L^2([a, b])$  on définit également la suite de sommes partielles suivante

$$S_M(f) = \sum_{m=-M}^M \langle f, u_m \rangle u_m, \quad M \in \mathbb{N}_0.$$

### Résultats auxiliaires.

Pour tout  $M \in \mathbb{N}_0$ , posons (noyau de Dirichlet)

$$D_M(t) = \begin{cases} \frac{\sin((2M+1)\frac{t}{2})}{\sin(\frac{t}{2})} & \text{si } t \in ]0, 2\pi[ \\ 2M+1 & \text{si } t \in \{0, 2\pi\}. \end{cases}$$

*Propriétés.*

(1) Pour tout  $M \in \mathbb{N}_0$ , on a

$$D_M(t) = \sum_{m=-M}^M e^{imt}, \quad \int_0^{2\pi} D_M(t) dt = 2\pi.$$

(2) Pour toute fonction  $2\pi$ -périodique  $f$  appartenant à  $L^2([0, 2\pi])$  et pour tout  $M \in \mathbb{N}_0$ , on a

$$S_M(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} D_M(y) f(x-y) dy, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(3) Pour toute fonction  $f$  de classe  $C_1$  par morceaux sur  $[0, 2\pi]$ , on a  $f \in L^2([0, 2\pi])$  et

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} S_M(f)(x) = f(x)$$

en tout  $x \in ]0, 2\pi[$  où  $f$  est dérivable.

*Preuve.* (1) Le premier point résulte d'une sommation de termes consécutifs d'une suite géométrique.

(2) On a successivement

$$\begin{aligned} S_M(f)(x) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-M}^M \int_0^{2\pi} f(y) e^{-imy} dy e^{imx} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{m=-M}^M e^{im(x-y)} f(y) dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{m=-M}^M e^{imy} f(x-y) dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} D_M(y) f(x-y) dy. \end{aligned}$$

(3) Prolongeons  $f$  pp sur  $\mathbb{R}$  par  $2\pi$ -périodisation. Comme  $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} D_M(y) f(x) dy$  pour tout  $M$ , on obtient

$$\begin{aligned} S_M(f)(x) - f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} D_M(y) (f(x-y) - f(x)) dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin\left((2M+1)\frac{y}{2}\right) \frac{f(x-y) - f(x)}{\sin(y/2)} dy \end{aligned}$$

Si  $x \in ]0, 2\pi[$  est un point où  $f$  est dérivable, la fonction  $y \mapsto \frac{f(x-y) - f(x)}{\sin(y/2)}$  admet une limite finie en  $0^+$  et en  $(2\pi)^-$ . Il s'ensuit qu'elle est intégrable sur  $]0, 2\pi[$ . Ainsi,  $S_M(f)(x) - f(x) \rightarrow 0$  si  $M \rightarrow +\infty$  en utilisant les propriétés à l'infini des transformées de Fourier dans  $L^1(\mathbb{R})$ .  $\square$

Sous les mêmes conditions que dans la partie (3), on montre de manière analogue que l'on a

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} S_M(f)(x) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}$$

en tout  $x \in ]0, 2\pi[$ , avec  $f(x+) =$  limite à droite de  $f$  en  $x$  et avec  $f(x-) =$  limite à gauche de  $f$  en  $x$ ; on a aussi

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} S_M(f)(0) = \lim_{M \rightarrow +\infty} S_M(f)(2\pi) = \frac{f(0^+) + f((2\pi)^-)}{2}$$

### Théorème

**Les fonctions  $u_m$  ( $m \in \mathbb{Z}$ ) forment une suite orthonormée totale dans  $L^2([a, b])$**

*Preuve.* Un calcul direct montre que les fonctions sont orthogonales deux à deux et que leur norme dans  $L^2([a, b])$  vaut 1.

Démontrons à présent que ces fonctions forment une suite totale. Pour plus de facilité dans les notations, considérons  $a = 0$  et  $b = 2\pi$ .

Soit  $f \in L^2([0, 2\pi])$  tel que  $\langle f, u_m \rangle = 0$  pour tout  $m$ . Montrons que  $f = 0$ .

Vu le théorème d'approximation dans  $L^2$ , il existe une suite de fonctions étagées  $\alpha_m$  ( $m \in \mathbb{N}_0$ ) qui converge vers  $f$  dans  $L^2([0, 2\pi])$ ; cette suite est donc telle que

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \langle f, \alpha_m \rangle = \|f\|^2.$$

Vu les résultats auxiliaires précédents, pour tout  $m$ , on a

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} S_M(\alpha_m)(x) = \alpha_m(x)$$

en tout réel  $x$  de  $[0, 2\pi]$  sauf un nombre fini d'entre eux; comme la suite est convergente dans  $L^2([0, 2\pi])$ , on a aussi

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} S_M(\alpha_m) = \alpha_m$$

dans  $L^2([0, 2\pi])$ . Il s'ensuit que, pour tout  $m$

$$\langle f, \alpha_m \rangle = \lim_{M \rightarrow +\infty} \langle f, S_M(\alpha_m) \rangle = 0$$

donc

$$0 = \lim_{m \rightarrow +\infty} \langle f, \alpha_m \rangle = \|f\|^2$$

et par suite  $f = 0$ .  $\square$