ANALYSE II, 2011-2012, 2e bachelier ingénieur civil
Examen du 27 janvier 2012— Solutions
Version : 25 janvier 2012 (V1 : 15/01/12)

THEORIE

Théorie 1

1.1) <u>Enoncer et démontrer</u> le théorème de Liouville relatif à la caractérisation des fonctions entières avec bornation « polynomiale ». Les hypothèses et les résultats utilisés dans la preuve doivent être clairement exprimés.

1.2) <u>Enoncer</u> le résultat donnant le développement en série de puissances entières d'une fonction holomorphe au voisinage d'une singularité isolée (théorème de Laurent). Les hypothèse et thèse, de même que les notations employées, doivent être clairement exprimées.

Théorie 2

<u>Donner la définition</u> de la transformée de Fourier d'une fonction intégrable dans $\mathbb{R}$. <u>Enoncer</u> ensuite le théorème de Fourier (pour une fonction intégrable de transformée intégrable) en exprimant toutes les transformées de Fourier explicitement (c'est-à-dire sous forme d'intégrale, en repassant à la définition).

Solution. Voir cours et notes de cours

EXERCICES

<u>Exercice 1</u>

1.1) Soit $\mathcal{E}$ l'arc de l'ellipse d'équation cartésienne $4x^2 + y^2 = 4$ situé dans le premier quadrant.

(a) Déterminer un paramétrage injectif de cet arc.

(b) En précisant (si nécessaire) l'orientation, calculer les intégrales suivantes

$$\int_{\mathcal{E}} x\ dx, \quad \int_{\mathcal{E}} x\ dy, \quad \int_{\mathcal{E}} xy\ ds$$

1.2) Calculer l'intégrale suivante (intégrale sur une surface)

$$\iint_{\mathcal{S}} rot(\vec{f}) \bullet \vec{n}\ d\sigma$$

pour la fonction vectorielle $\vec{f}$ donnée par $\vec{f}(x,y,z) = [-x^2y, xy^2, z^2]$ et la surface $\mathcal{S}$ constituée par les points du paraboloïde d'équation cartésienne $x^2 + y^2 = z$ dont la troisième coordonnée est inférieure ou égale à 2 ($\vec{n}$ désigne la normale unitaire extérieure)

Solution. 1.1) (a) D'une part, une représentation paramétrique injective et régulière de l'arc d'ellipse est

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = 2\sin t \end{cases} \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

car pour tous réels positifs x, y vérifiant l'équation, il existe un seul $t \in [0, \pi/2]$ tel que $x = \cos(t)$ et $y = 2\sin(t)$; réciproquement, quel que soit $t \in [0, \pi/2]$, $x = \cos(t)$ et $y = 2\sin(t)$ donnent un couple (x, y) qui vérifie bien l'équation.

(b) L'orientation doit être précisée pour les deux premières intégrales. On considère l'orientation « trigonométrique ». On a successivement

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{E}} x\ dx &= \int_0^{\pi/2} \cos t\ (-\sin t)\ dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} D\cos^2 t\ dt = -\frac{1}{2} \\
\int_{\mathcal{E}} x\ dy &= \int_0^{\pi/2} \cos t\ (2\cos t)\ dt = \int_0^{\pi/2} (1 + \cos(2t))\ dt = \frac{\pi}{2} \\
\int_{\mathcal{E}} xy\ ds &= \int_0^{\pi/2} 2\cos t\ \sin t\ \sqrt{1 + 3\cos^2 t}\ dt = -\frac{2}{9}\left[(1 + 3\cos^2 t)^{3/2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{14}{9}
\end{aligned}$$

1.2) On choisit de désigner par $\vec{n}$ la normale unitaire « extérieure » à la surface.
Le rotationnel de $\vec{f}$ est donné par

$$rot\vec{f}(x,y,z) = [0,0,x^2+y^2]$$

En utilisant le paramétrage classique [6]

$$\vec{\varphi}(z,t) = [\sqrt{z}\cos t, \sqrt{z}\sin t, z],\ z\in[0,2],\ t\in[0,2\pi]$$

de la surface donnée, on a

$$D_z\vec{\varphi}(z,t)\wedge D_t\vec{\varphi}(z,t) = [-\sqrt{z}\cos t, -\sqrt{z}\sin t, \frac{1}{2}]$$

$$\vec{n}(z,t) = \frac{[\sqrt{z}\cos t, \sqrt{z}\sin t, -\frac{1}{2}]}{\|D_z\vec{\varphi}(z,t)\wedge D_t\vec{\varphi}(z,t)\|}$$

et les composantes du rotationnel sont $[0,0,z]$. Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
\iint_S rot(\vec{f})\bullet\vec{n}\ d\sigma &= \int\int_{[0,2]\times[0,2\pi]} \frac{-z}{2\|D_z\vec{\varphi}(z,t)\wedge D_t\vec{\varphi}(z,t)\|}\ \|D_z\vec{\varphi}(z,t)\wedge D_t\vec{\varphi}(z,t)\|\ dt\ dz \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} dt \int_0^2 z\ dz \\
&= -2\pi
\end{aligned}$$

Le calcul de cette intégrale peut aussi s'effectuer en utilisant le théorème de Stokes.

<u>Exercice 2</u>

2.1) On donne les fonctions F, f et g par

$$F(z) = \frac{iz-1}{z^3-i},\quad f(z) = ze^{\frac{1}{z}},\quad g(z) = \frac{1-\cos(z)}{z^3}$$

(a) Où ces fonctions sont-elles holomorphes ?
(b) Quels sont leurs zéros ? Quelles en sont les multiplicités respectives ?
(c) Quelles sont les singularités isolées ? De quels types sont-elles ?
(d) Pour f et g, déterminer le résidu en chacune des singularités isolées.
(e) Pour f et g, déterminer le développement de Laurent en chacune des singularités isolées. (Sous forme de série et aussi en précisant les fonctions « classiques » h et H)
(f) Calculer $\int_\Gamma f(z)\ dz$ lorsque Γ est le bord du carré centré à l'origine, de mesure de côté égale à 2, et dont les côtés sont parallèles aux axes (orientation : « aire à gauche »).

2.2) Si $0<a<1$, calculer l'intégrale suivante en utilisant la technique des fonctions holomorphes.

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{1+a\cos x}dx.$$

2.3) Soit γ le bord du disque centré en $2i$ et de rayon 1. On considère que l'on parcourt ce bord « aire à gauche » et qu'on utilise un paramétrage injectif. Déterminer la partie réelle de l'intégrale suivante (la fonction argument est à valeurs dans $]-\pi,\pi]$)

$$\int_\gamma \frac{Ln(z)}{2z-3i}dz$$

Solution. 2.1) *Fonction F.*
(a) Les zéros du dénominateur sont les racines cubiques de $i = e^{i\pi/2}$, à savoir les complexes

$$e^{i\pi/6},\quad e^{5i\pi/6} = -e^{-i\pi/6},\quad -i$$

6. On peut tout aussi bien utiliser $[z\cos t, z\sin t, z^2],\ z\in[0,\sqrt{2}],\ t\in[0,2\pi]$

On obtient ainsi directement que F, quotient de deux polynômes, est holomorphe dans le complémentaire des zéros du dénominateur. Par ailleurs, comme le numérateur et le dénominateur ont tous les deux le zéros (simple) $-i$, leur factorisation conduit à une simplification. La fonction se prolonge donc également en une fonction holomorphe dans

$$\mathbb{C} \setminus \left\{e^{i\pi/6}, e^{5i\pi/6}\right\}$$

par

$$F(z) = \frac{i}{\left(z - e^{i\pi/6}\right)\ \left(z + e^{-i\pi/6}\right)}$$

(b) et (c) Vu la forme de F, cette fonction n'a pas de zéro et ses deux singularités isolées sont $e^{i\pi/6}$ et $e^{5i\pi/6} = -e^{-i\pi/6}$. Il s'agit de pôles simples puisque F est une fraction rationnelle et que les deux singularités sont des zéros simples du dénominateur.

Fonction f.

(a) Vu son expression, la fonction f est holomorphe dans $\Omega = \mathbb{C}_0$

(b) Cette fonction n'a aucun zéro dans Ω.

(c) Le complexe 0 est la seule singularité isolée de f ; il s'agit d'une singularité essentielle car f n'admet pas de limite en 0 (par exemple, $\lim_{m\to+\infty} f(\frac{1}{m}) = +\infty$, $\lim_{m\to+\infty} f(-\frac{1}{m}) = 0)$ [7]

(d) et (e) Le résidu de f en 0 peut s'obtenir directement en utilisant le développement de Laurent de f. On a en effet $e^Z = 1 + Z + \frac{Z^2}{2} + \sum_{m=3}^{+\infty} \frac{Z^m}{m!}$ dans $\mathbb{C}$ donc

$$f(z) = ze^{1/z} = z + 1 + \frac{1}{2z} + \sum_{m=3}^{+\infty} \frac{1}{z^{m-1}m!}, \quad z \in \mathbb{C}_0 \quad (*)$$

avec

$$h(z) = z + 1, \quad H(Z) = \frac{Z}{2} + \sum_{m=3}^{+\infty} \frac{Z^{m-1}}{m!}.$$

Dès lors, on a également

$$Res_0 f = \text{coefficient de } 1/z \text{ dans le développement de Laurent}(*) = \frac{1}{2}.$$

(f) La fonction f étant holomorphe dans le complémentaire de l'origine, le théorème d'invariance par homotopie et la définition d'un résidu conduisent directement à

$$\int_\Gamma f(z)\ dz = 2i\pi Res_0 f = i\pi$$

Fonction g. Remarquons que g s'écrit comme quotient de deux fonctions holomorphes dans $\mathbb{C}$, à savoir $z \mapsto 1 - \cos(z)$ et $z \mapsto z^3$.

(a) Vu son expression (quotient), la fonction g est holomorphe dans le complémentaire des zéros du dénominateur, c'est-à-dire dans $\mathbb{C}_0$; elle ne se prolonge pas en une fonction holomorphe dans $\mathbb{C}$ (cf développement de Laurent où $H \neq 0$).

(b) Les zéros de g sont les complexes différents de 0 qui annulent g, c'est-à-dire les complexes z (non nuls) qui annulent $1 - \cos(z)$:

$$2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}_0$$

Ce sont tous des zéros doubles car si z_k est l'un de ces zéros, on a $Dg(z_k) = 0$ et $D^2g(z_k) \neq 0$(calcul direct).

(c) La seule singularité isolée est 0 et il s'agit d'un pôle simple (cf développement de Laurent où H est un polynôme de degré 1).

(d) et (e) On a

$$g(z) = \frac{1}{z^3}\left(1 - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{z^{2k-3}}{(2k)!} = \frac{1}{2z} + G(z), \quad z \in \mathbb{C}_0$$

avec

$$G(z) = \sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{z^{2k-3}}{(2k)!}$$

7. Une autre justification directe consiste à utiliser le développement de Laurent (H est une série)

On a donc directement la décomposition de Laurent

$$g(z) = h(z) + H\left(\frac{1}{z}\right)$$

avec

$$h(z) = G(z), \quad H(Z) = \frac{Z}{2}.$$

Le résidu de g en 0 est le coefficient de $1/z$ dans ce développement, à savoir 1/2.

2.2) La fonction à intégrer est continue sur le compact $[0, 2\pi]$ (car $x \mapsto 1 + a\cos x$ est une fonction continue et strictement positive sur $\mathbb{R}$) ; elle y est donc intégrable. Cela étant, en utilisant la relation

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

on obtient successivement

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 + a\cos x} dx = 2\int_0^{2\pi} \frac{e^{ix}}{ae^{2ix} + 2e^{ix} + a} dx = \frac{2}{i}\int_\gamma \frac{1}{az^2 + 2z + a} dz$$

avec $\gamma(x) = e^{ix},\ x \in [0, 2\pi]$. Les zéros du polynôme $z \mapsto az^2 + 2z + a$ étant les réels $r_0 = \frac{1}{a}(-1 + \sqrt{1 - a^2})$ et $r_1 = -\frac{1}{a}(1 + \sqrt{1 - a^2})$, le théorème des résidus permet immédiatement de dire que l'intégrale à calculer vaut

$$4\pi Res_{r_0} = \frac{2\pi}{ar_0 + 1} = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - a^2}}$$

2.3) L'intégrale se calcule directement grâce à la formule intégrale de Cauchy. En effet, la fonction $z \mapsto \frac{1}{2}Ln(z)$ est holomorphe dans l'ouvert $\Omega = \mathbb{C}\setminus]-\infty, 0]$ et l'expression du chemin correspond tout à fait à l'énoncé de la formule intégrale de Cauchy. Puisque $\frac{3i}{2}$ se trouve « à l'intérieur » de ce chemin, on a

$$\int_\gamma \frac{Ln(z)}{2z - 3i} dz = i\pi Log\left(\frac{3i}{2}\right) = i\pi\ln\left(\frac{3}{2}\right) - \pi Arg\left(\frac{3i}{2}\right) = i\pi\ln\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{\pi^2}{2}$$

La partie réelle de cette intégrale vaut donc $\frac{-\pi^2}{2}$.

<u>Exercice 3</u>

3.1) (a) Déterminer la transformée de Fourier ($-$) de la fonction suivante (en explicitant les calculs y conduisant)

$$f(x) = e^{-3|x|},\ x \in \mathbb{R}$$

(b) En déduire la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{9 + x^2} dx$$

3.2) Montrer que les fonctions u et v suivantes sont orthogonales dans $L^2([0, 2])$

$$u(x) = e^{ix\pi}, \qquad v(x) = e^{-ix\pi}$$

Solution. 3.1) (a) La fonction donnée est intégrable dans $\mathbb{R}$ car elle est continue et $\lim_{x\to\infty} x^2 f(x) = 0$. Cela étant, comme la fonction est paire, on obtient directement, quel que soit $y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_y^- f = \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} f(x)\ dx &= 2\int_0^{+\infty} \cos(xy)e^{-3x} dx = 2\Re\left(\int_0^{+\infty} e^{-ixy}e^{-3x} dx\right)\\
&= 2\Re\left(\frac{1}{iy + 3}\right) = 2\Re\left(\frac{3 - iy}{y^2 + 9}\right)\\
&= \frac{6}{y^2 + 9}.
\end{aligned}$$

(b) Cela étant, comme cette dernière fonction est intégrable sur $\mathbb{R}$, on a directement (la fonction f étant continue sur $\mathbb{R}$, l'égalité du théorème de Fourier est une égalité ayant lieu en tout réel)

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{9+x^2} dx = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{2ix}}{9+x^2} dx = \frac{1}{12} \mathcal{F}_2^+ \mathcal{F}^- f = \frac{\pi}{6} f(2) = \frac{e^{-6}\pi}{6}.$$

3.2) Les fonctions données sont continues sur $[0,2]$ donc y sont de carré intégrable ; elles appartiennent donc bien à $L^2([0,2])$. Elles sont orthogonales dans cet espace car leur produit scalaire est nul ; en effet

$$\int_0^2 u(x)\overline{v(x)}\ dx = \int_0^1 e^{i\pi x} e^{i\pi x} dx = \int_0^2 e^{2i\pi x} dx = \frac{1}{2i\pi} \left[e^{2i\pi x}\right]_0^2 = 0.$$

<u>Exercice 4</u> Pourquoi l'affirmation suivante est-elle correcte ?

Si f est holomorphe dans $\mathbb{C}$ et telle que $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$, alors f est identiquement nul.

Solution. Comme $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$, il existe $R > 0$ tel que $|f(z)| \leq 1$ pour $|z| \geq R$. Par ailleurs, $|f|$ est continu dans $\mathbb{C}$ donc borné dans tout compact. Il s'ensuit que $|f|$ est borné dans $\mathbb{C}$, par exemple par $1 + \sup_{|z|\leq R} |f(z)|$. Le théorème de Liouville affirme alors que f est constant et comme sa limite est nulle à l'infini, cette constante ne peut être que 0.