

## ANALYSE II

## Liste "type" 1

Vendredi 23 septembre 2011 (et vendredi 30 septembre 2011)

REMARQUES pour les séances de répétitions

- A la répétition: exercices \*.

- Voir aussi d'autres listes via les pages web relatives à ce cours

Pour les NOTATIONS des vecteurs:

-chez EK: en gras (et souvent lettre minuscule); si un vecteur est donné par ses composantes, celles-ci sont séparées par des virgules, et entourées de crochets (les coordonnées de points sont entourées de parenthèses);

-au cours (et de façon naturelle chez plusieurs encadrants):  $\vec{v}$ ;-provient de 1er bachelier:  $\underline{v}$ Rappel A-DERIVATION

1. 1.1) (\*) Déterminer le domaine de définition et d'infinie dérivabilité des fonctions  $f, g, h$  données explicitement ci-dessous. Représenter ces domaines.

- 1.2) (\*) Déterminer l'expression explicite de  $|x|D_x g(x, y) + |y|D_y g(x, y)$ .

$$f(x, y) = \ln \left( e^{x+y} - e^{\frac{1}{x-y}} \right), \quad g(x, y) = \arcsin \left( \frac{x}{y} \right), \quad h(x, y) = \sqrt{x^2 + y + 1}.$$

2. On donne la fonction  $g$ , dérivable sur  $]1, +\infty[$  et de dérivée

$$g'(x) = Dg(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}, \quad x > 1.$$

On pose ensuite

$$F(x) = g \left( \frac{1 + x^2}{1 - x^2} \right).$$

On demande de trouver où la fonction  $F$  est dérivable et de déterminer l'expression de sa dérivée.

3. 3.1) (\*) Déterminer dans quel ensemble la fonction de deux variables suivante (notée  $f$ ) est continûment dérivable

$$f(x, y) = \ln(16 - 4x^2 - 4y^2)$$

et représenter graphiquement ce domaine (en le hachurant).

- Déterminer l'expression explicite de la fonction  $F$  définie par

$$F(t) = f(t - 1, t + 1).$$

- Déterminer le domaine de dérivabilité et l'expression explicite de la dérivée de  $F$ .

- 3.2) On donne une fonction  $f$ , continûment dérivable sur  $] -2, 3[ \times ]0, +\infty[$ . On demande le domaine de dérivabilité de la fonction  $F : t \mapsto f(t^2 - 2t, e^{-t} - 1)$  et l'expression de sa dérivée première en fonction des dérivées partielles de  $f$ .

4. Exercice 1 p 403 EK

Rappel B-INTEGRATION à une, deux et trois variables

1. Pour chacun des cas suivants, déterminer si  $f_j$  (\*:1,2,3,8,9) est intégrable sur  $A$ .

$$f_1(x) = \frac{1}{\sin x}, A = [-1, 1]; f_2(x) = \frac{x}{\sin x}, A = [-1, 1]; f_3(x) = \frac{\sin x}{1+x^2}, A = [0, +\infty[;$$

$$f_4(x) = \frac{x^2}{1+x^3}, A = [0, +\infty[; f_5(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3}}, A = ]0, 1] \text{ et } A = [1, +\infty[; f_6(x) = e^{-|x|}, A = \mathbb{R}$$

$$f_7(x) = \frac{x}{e^x - 1}, A = [0, +\infty[; f_8(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}, A = ]0, 1]; f_9(x) = e^{-ix}, A = [0, +\infty[.$$

2. Calculer l'aire de la partie du plan dont une description analytique est la suivante

$$\{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \text{ et } 0 \leq y \leq \inf\{e^{-x}, e^x\}\}.$$

Donner aussi une représentation graphique de cet ensemble.

(\*) Même question pour

$$\{(x, y) : x \in [0, 2\pi], y \in \mathbb{R} \text{ et } \sin x \leq y \leq \cos x\}.$$

3. Permuter les intégrales et représenter l'ensemble d'intégration dans les cas suivants

$$a) \int_{-2}^2 \left( \int_{-1}^{-x/2} f(x, y) dy \right) dx, \quad b) \int_{-1}^0 \left( \int_{-3x-4}^0 f(x, y) dy \right) dx \quad c) (*) \int_0^{\sqrt{2}} \left( \int_y^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx \right) dy.$$

4. a) (\*) Calculer l'intégrale de  $f(x, y) = y^2 \sin(xy)$  sur  $A = [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, 1]$ .

b) Calculer l'intégrale de  $f(x, y) = \cos(x + y)$  sur  $A = [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \pi]$ .

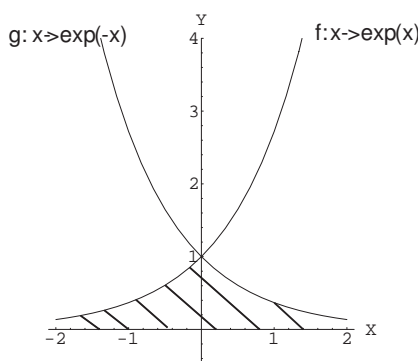
c) Calculer l'intégrale de  $f(x, y) = x + y$  sur  $A = \{(x, y) : 0 \leq y \leq \inf\{x, \sqrt{1-x^2}\}\}$ .

5. On considère l'ensemble  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq \inf\{e^{-x}, \ln(x+e)\}\}$ .

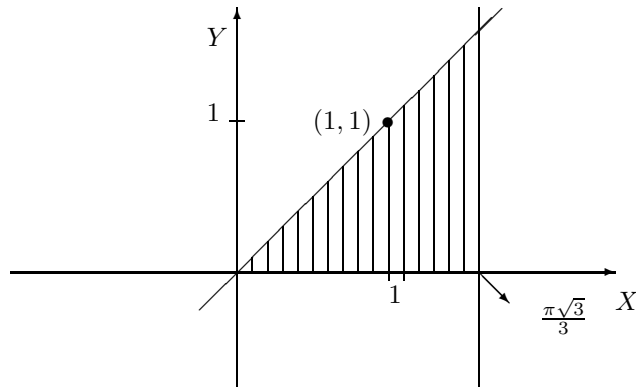
Représenter graphiquement  $A$ .

Ecrire l'intégrale  $\iint_A f(x, y) dx dy$  sous forme de deux intégrales successives par rapport à  $x$  puis à  $y$  (resp. par rapport à  $y$  puis à  $x$ ).

6. a) Calculer l'intégrale de  $f(x, y) = x + y$  sur l'ensemble fermé hachuré suivant (et donner une description analytique de cet ensemble)



- b) (\*) Calculer l'intégrale de  $f(x, y) = x^2 \sin(xy)$  sur l'ensemble borné, fermé hachuré suivant et donner une description analytique de cet ensemble



7. Déterminer si les intégrales suivantes existent; si oui, les calculer. Représenter géométriquement l'ensemble d'intégration dans chaque cas.

$$a) \int_0^{+\infty} \left( \int_0^{x^2} \frac{x e^{-x^2}}{x^2 + y} dy \right) dx, \quad b) \int_0^{+\infty} \left( \int_0^{x^2} \frac{e^{-x^2}}{x^2 + y} dy \right) dx,$$

$$c) \int_0^1 \left( \int_y^{+\infty} \frac{\sqrt{y}}{x^2 + y^2} dx \right) dy, \quad d) \int_{-1}^1 \left( \int_0^{x^2} \frac{1}{x + y} dy \right) dx$$

8. Calculer l'intégrale de  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$  sur  $A = \{(x, y) : x \geq 0, y \leq 0, x^2 + y^2 \leq 4\}$ .

De même, calculer l'intégrale de  $f(x, y) = x^3 + y^3$  sur  $A = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$  ( $a$  et  $b$  sont des réels strictement positifs) et donner une représentation graphique de  $A$  dans un repère orthonormé.

9. (\*) Soit  $A$  la surface fermée du plan bornée par les cercles de rayon respectivement 1, 2, centrés à l'origine et l'axe  $X$ . Calculer l'intégrale de  $f(x, y) = 1 + 3x + 8y^2$  sur  $A$ .
10. On demande de justifier l'existence et de calculer l'intégrale

$$\int_0^1 \left( \int_0^{1-x} e^{\frac{y-x}{y+x}} dy \right) dx.$$

(Ecrire cette intégrale comme une intégrale double et ensuite effectuer un changement de variables au moyen des relations  $2x = u + v, 2y = u - v$ .)

11. L'intégrale suivante a-t-elle un sens? Si oui, la calculer.

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x} dx.$$

12. L'intégrale suivante a-t-elle un sens? Si oui, la calculer.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1 - x^2} dx.$$

(Suggestion: transformer  $\ln x$  en une intégrale:  $\ln x = \int_0^{+\infty} (\frac{x^2}{1+x^2 y} - \frac{1}{1+y}) dy$ ; permuter alors les intégrales.)

En déduire la valeur de  $\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x} dx$  et de  $\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x} dx$ , puis la valeur de  $\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^2}$  et de  $\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{m^2}$ .

13. Voir aussi les exercices résolus ou proposés aux pages 437-439 de EK

14. Application du théorème des intégrales paramétriques.

14.1) (\*) Soit un réel  $a$  et soit une fonction  $f$  telle que  $t \mapsto f(t)e^{-at}$  soit intégrable sur  $]0, +\infty[$ . Montrer que la fonction

$$x \mapsto F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t) dt$$

est dérivable sur  $]a, +\infty[$  et que, dans cet intervalle, on a

$$DF(x) = - \int_0^{+\infty} t e^{-xt} f(t) dt.$$

14.2) Calculer

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(ax) - \cos(bx)}{x} e^{-px} dx$$

pour tous réels  $a, b$  et tout  $p > 0$  (si  $p$  est complexe de partie réelle strictement positive, il s'agit en fait de la transformée de Laplace (en  $p$ ) unilatérale de la fonction  $x \mapsto \frac{\cos(ax) - \cos(bx)}{x}$ ).

14.3) Calculer

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(ax) - \arctan(bx)}{x} dx, \quad (a, b > 0); \quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2 + a)^n} dx, \quad a > 0, n \in \mathbb{N}_0.$$

14.4) Soit

$$F(t) = \int_0^1 \frac{x^t - 1}{\ln x} dx, \quad t > -1.$$

- Montrer que cette fonction est bien définie et est continûment dérivable sur  $] -1, +\infty[$ .
- Calculer  $F(0)$ .
- Montrer que  $DF(t) = \frac{1}{t+1}$ .
- En déduire l'expression explicite (pas sous forme d'intégrale) de  $F$ .

### Rappel C-CALCUL VECTORIEL

1. On fixe une base orthonormée de l'espace notée  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  et on donne les vecteurs

$$\vec{u} = 3\vec{e}_1 - \frac{1}{2}\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3, \quad \vec{v} = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_3, \quad \vec{w} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 2\vec{e}_3.$$

- dans la base donnée, déterminer les composantes de  $2\vec{u} - \vec{u} \wedge \vec{w}$  et de  $\vec{u} \bullet \vec{v}\vec{w}$
- déterminer la norme de  $\vec{u} + 3\vec{v}$
- déterminer la nature des expressions suivantes (si elles ont un sens);

$$\vec{u} \bullet \vec{v} \bullet \vec{w}, \quad \vec{v} \wedge (\vec{u} \bullet \vec{v})\vec{u}, \quad \vec{u} \bullet \vec{w} \vec{u}, \quad (\vec{u} \wedge \vec{w})\vec{u}, \quad (\vec{u} \wedge \vec{w}) \bullet \vec{u}$$

- les vecteurs  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  sont-ils linéairement indépendants ou dépendants? Pourquoi?
- si les vecteurs  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  sont linéairement indépendants, déterminer les composantes de  $\vec{e}_2$  dans la base qu'ils forment.

2. On fixe une base orthonormée de l'espace et les vecteurs  $\vec{x}, \vec{v}$  respectivement de composantes  $(1, 2, 2), (1, -1, 0)$ .

- Donner une représentation du vecteur  $\vec{x}$ .
- Déterminer les composantes de la projection orthogonale de  $\vec{x}$  sur la droite vectorielle engendrée par  $\vec{v}$ .
- Déterminer les composantes de la projection orthogonale du vecteur  $\vec{x}$  sur le plan déterminé par les vecteurs de composantes  $(1, 1, 0)$  et  $(0, 0, 1)$ .

## ANALYSE II

## Liste "type" 1

## Solutions

La plupart des exercices sont ceux de la liste 1 de 2006-2007; les solutions aux exercices de cette liste sont disponibles en format pdf (par exemple sur le site web [www.afo.ulg.ac.be](http://www.afo.ulg.ac.be)).

Ci-dessous sont présentées les solutions aux exercices qui figurent dans cette liste 1 mais dans aucune de 2006-2007.

Note: la présente liste est la même que la liste 1 de 2009-2010.

Exercice 1.1), fonction  $f$ 

Les domaines de définition et d'infinie dérivabilité sont les mêmes. Il s'agit de l'ensemble

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > y \text{ et } x^2 - y^2 > 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < y \text{ et } x^2 - y^2 < 1\}$$

c'est-à-dire de l'union des deux ensembles suivants:

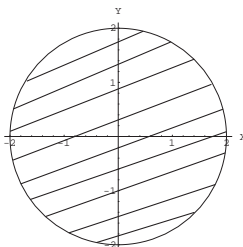
- l'ensemble des points du plan situés au-dessus de la première bissectrice (d'équation  $x = y$ ) et "entre" les branches de l'hyperbole équilatère d'équation cartésienne  $x^2 - y^2 = 1$  (dont les asymptotes sont les droites d'équation  $x = y$  et  $x = -y$ );
- l'ensemble des points du plan situés à droite de la branche de droite de cette même hyperbole.

Exercice 3.1)

La fonction est continûment dérivable dans

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4 > x^2 + y^2\}$$

qui est la surface intérieure au cercle (circonférence) d'équation cartésienne  $x^2 + y^2 = 4$  (les points de cette circonférence n'étant pas compris dans l'ensemble).



L'expression explicite de  $F$  est

$$F(t) = \ln(16 - 4(t-1)^2 - 4(t+1)^2) = \ln(16 - 4t^2 + 8t - 4 - 4t^2 - 8t - 4) = \ln(8 - 8t^2) = 3 \ln 2 + \ln(1 - t^2)$$

La fonction  $F$  est dérivable dans  $] -1, 1[$  et, dans cet ensemble, on a

$$DF(t) = D \ln(1 - t^2) = -2 \frac{t}{1 - t^2}.$$

Exercice 14.1)

Il s'agit d'une application du théorème des intégrales paramétriques avec  $A = ]0, +\infty[$  comme ensemble d'intégration (variable notée  $t$ ) et  $\Lambda = ]a, +\infty[$  comme ouvert de variation du paramètre (paramètre noté  $x$ ).

Seule la majoration uniforme de la dérivée première n'est pas immédiate. Suggestion: si  $K$  est un compact inclus dans  $\Lambda$ , alors il existe  $r > a$  tel que  $K \subset [r, +\infty[$ . Il s'ensuit que

$$|D_x(e^{-xt} f(t))| = t e^{-xt} |f(t)| \leq e^{-at} |f(t)| t e^{-(r-a)t} \leq C e^{-at} |f(t)| \quad \forall x \in K, t > 0.$$

Exercice 14.4)

Montrons que  $F$  est bien défini c'est-à-dire que  $x \mapsto f(x, t) = \frac{x^t - 1}{\ln x}$  est intégrable sur  $]0, 1[$  pour tout  $t > -1$ .

- la fonction  $f(\cdot, t)$  est continue sur  $]0, 1[$

- intégrabilité en  $1^-$ : le théorème de l'Hospital montre que  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x, t) = 1 \in \mathbb{R}$ ; la fonction est donc intégrable en  $1^-$

- intégrabilité en  $0^+$  lorsque  $t \geq 0$ : on a  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x, t) = 0 \in \mathbb{R}$ ; la fonction est donc intégrable en  $0^+$

- intégrabilité en  $0^+$  lorsque  $-1 < t < 0$ : on a  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{-t} f(x, t) = 0 \in \mathbb{R}$ ; la fonction est donc intégrable en  $0^+$ .

La seconde étape consiste alors à appliquer le théorème des intégrales paramétriques. Tout est direct, sauf peut-être l'estimation uniforme de la dérivée.

Suggestion: on a  $D_t f(x, t) = x^t$ . Majoration lorsque  $t \in [r, 0]$  avec  $-1 < r < 0$ :  $\sup_{t \in [r, 0]} |D_t f(x, t)| = x^t \leq x^r \in L^1(]0, 1[)$ ; majoration lorsque  $t \in [0, R]$  avec  $R > 0$ :  $\sup_{t \in [0, R]} |D_t f(x, t)| = x^t \leq 1 \in L^1(]0, 1[)$ .

Les intégrales paramétriques donnent

$$DF(t) = \int_0^1 D_t f(t, x) dx = \int_0^1 x^t dx = \frac{1}{t+1}, \quad \forall t > -1$$

donc

$$F(t) = \ln(t+1) + \text{constante}, \quad \forall t > -1.$$

Comme  $F(0) = 0$ , on trouve  $\text{constante} = 0$  et finalement

$$\int_0^1 f(t, x) dx = \ln(t+1), \quad \forall t > -1.$$