

ANALYSE II

Liste "type" 4

(Mardi 11 octobre 2011), mardi 18 octobre 2011

REMARQUES pour les séances de répétition

- Réf: notamment le livre de référence pour le cours, à savoir *Erwin Kreyszig* Chapitre 13

- A la répétition: exercices *

FONCTIONS D'UNE VARIABLE COMPLEXE, 1ere partie

1. Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire des complexes suivants (
- α
- est réel)

$$\frac{1+i}{1-2i}, \quad \frac{1}{2i^3-1}, \quad \frac{1}{\sin \alpha + i \cos \alpha}, \quad \cos\left(\frac{\pi}{6} + i\frac{\pi}{3}\right).$$

2. (*) Déterminer le module et la valeur principale (ie dans
- $]-\pi, \pi]$
-) de l'argument des complexes suivants

$$e^i, \quad (1+i)^{12}, \quad z_1, \quad z_2, \quad z_1 z_2$$

où $z_1 = -2 + 2i$ et $z_2 = 5i$.

3. Déterminer les racines quatrièmes de 1 (resp.
- $16i$
-) et en donner une représentation géométrique.

4. Résoudre les équations suivantes (
- z
- est une variable complexe)

$$z^2 + 1 = 0, \quad z^4 - 16 = 0, \quad (*)z^4 + 16 = 0, \quad (*)z^2 + z + 1 = 0, \quad (*)z^3 - 1 = 0, \quad (*)z^2 - i = 0.$$

5. Exercices 1-10 EK p617

6. On définit
- \mathbb{C}^2
- comme étant l'ensemble des couples de complexes (appelé encore vecteur à deux composantes complexes). Dans cet ensemble, on définit l'addition et la multiplication par un complexe (par ...), de même que le
- produit scalaire*

$$\langle (z_1, z_2), (z'_1, z'_2) \rangle = z_1 \overline{z'_1} + z_2 \overline{z'_2}$$

et la norme

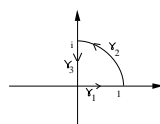
$$\|(z, z')\| = \sqrt{|z|^2 + |z'|^2}.$$

Calculer la norme de $(1, i)$ et le produit scalaire des éléments suivants de \mathbb{C}^2 : $(1, i)$ et $(1 + i, \frac{1}{1+i})$.Généralisation possible à \mathbb{C}^n .

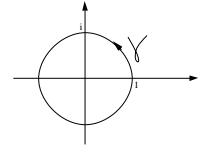
7. a) La série de terme général $1/n!$ converge-t-elle? Pourquoi? En déterminer la somme.
 b) La série de terme général $1/3^m$ converge-t-elle? Pourquoi? En déterminer la somme.
 c) Dans chacun des cas suivants, déterminer si les séries sont absolument convergentes/semi-convergentes. Si besoin, préciser en fonction du complexe z .

- $\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-z)^m}{m}$
- $\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(10-15i)^m}{m!}$
- $\sum_{m=1}^{+\infty} (1+i)^{-m}$
- $\sum_{m=1}^{+\infty} m^2 \left(\frac{i}{3}\right)^m$

8. (*) Soit
- $f(z) = |z|$
- . Calculer
- $\int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz + \int_{\gamma_3} f(z)dz$
- pour les chemins
- C_1
- suivants.



Calculer $\int_{\gamma} f(z)dz$ avec $f(z) = z$, $f(z) = \bar{z}$, $f(z) = \frac{1}{z}$, $f(z) = \frac{1}{z^2}$ et γ



9. Soit

$$S_{\gamma} = \int_{\gamma} \bar{z} dz.$$

- Montrer que, si γ est fermé, alors l'expression $\frac{1}{2i}S_{\gamma}$ est réelle et en donner une interprétation.
- Calculer S_{γ} pour le chemin formé par la juxtaposition du segment joignant l'origine au point de coordonnées $(1, 0)$ et du segment joignant $(1, 0)$ et $(1, 1)$.

10. Déterminer si les fonctions suivantes, prolongées par 0 en 0, sont continues en 0

$$f(z) = \frac{\Re z^2}{|z^2|}, \quad g(z) = |z|^2 \Re \left(\frac{1}{z} \right).$$

11. Montrer que la fonction $f(z) = \Re z$ n'est holomorphe en aucun point.
12. Montrer directement que la fonction f définie par $f(z) = \Re(\cos z)$ est harmonique dans \mathbb{R}^2 .
13. Résoudre les équations suivantes en la variable complexe z

$$\cos z = 0, \quad \cos z = 1, \quad \cos z = 3, \quad \sinh z = 0.$$

14. (*) Déterminer $\text{Log}_{\pi} z = \text{Log} z = \text{Ln} z$ (resp. $\text{Log}_0 z$) pour les complexes z suivants

$$-10, \quad 2 - 2i, \quad i, \quad -i, \quad e^{-i}.$$

Déterminer les parties réelle et imaginaire des complexes suivants (définition des puissances utilisant Log puis Log_0) :

$$(-i)^i, \quad (-1)^{1+i}.$$

15. (*) Déterminer où les fonctions suivantes sont holomorphes

$$\frac{1}{\sin z}, \quad \frac{1}{z^4 + 1}, \quad \text{Log}_0(1 + z), \quad \frac{\text{Log} z}{z^3 + 1}$$

16. (*) Soit la fonction $z \mapsto \frac{1}{z}$, holomorphe dans $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. En notant $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, on pose

$$P(x, y) = \Re f(z), \quad Q(x, y) = \Im f(z).$$

Représenter les courbes de niveau de P et de Q . Montrer que celles-ci sont orthogonales (au sens suivant: les tangentes aux points d'intersections sont orthogonales entre elles).

Suggestion: utiliser le gradient de P , et Q , ainsi que les relations de Cauchy-Riemann pour les parties réelle et imaginaire d'une fonction d'une variable complexe.

ANALYSE II

Liste "type" 4

Solutions

Cette liste d'exercices est la même que celle de 2009-2010 et 2010-2011.

Les solutions sont disponibles en format pdf (par exemple sur le site web www.afo.ulg.ac.be) (solutions à la liste 4 de 2006-2007; l'exercice 13 de la liste de 2006-2007 a été incorporé dans l'exercice 1 de 2009-2010).