Analyse II

Liste "type" 5

Mardi 25 octobre 2011, mardi 8 novembre 2011

REMARQUES pour les séances de répétition
- A la répétition: exercices *

FONCTIONS D'UNE VARIABLE COMPLEXE, 2eme partie

On désigne par $\mathcal{O}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions holomorphes dans un ouvert Ω de $\mathbb{C}$.

1. (*) Soit $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, Ω connexe. Démontrer que s'il existe une constante C telle que $|f| = C$ dans Ω, alors f est constant dans Ω.

2. On suppose Ω connexe. Si $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, démontrer que $\overline{f} \in \mathcal{O}(\Omega)$ si et seulement si f est constant.

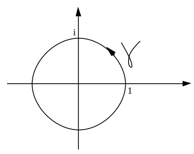
3. Soit $f \in C_2(\Omega)$. Démontrer que $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ si et seulement si on a ($\Delta f = 0$ et $\Delta(zf) = 0$) dans Ω.

4. a) (*) Où les fonctions suivantes sont-elles holomorphes?

$$f_1(z) = \frac{1}{e^z - 1}, \quad f_2(z) = \frac{1}{e^{iz} + i}, \quad f_2(z) = \frac{\sin z}{\sinh z}, \quad f_3(z) = \frac{1}{(z^2 + z + 1)^2}$$

   b) (*) Où la fonction suivante est-elle holomorphe? Quelles en sont les singularités isolées[1]?

$$f(z) = \frac{1}{\sin(1/z)}.$$

5. (*) Si γ désigne le chemin simple régulier suivant 

, calculer

$$a) \int_\gamma \Re z \; dz, \quad b) \int_\gamma e^{z^2} \; dz, \quad c) \int_\gamma \frac{1}{z-2} \; dz \quad d) \int_\gamma \frac{1}{z-\frac{1}{2}} \; dz, \quad e) \int_\gamma \frac{1}{z-\frac{i}{2}} \; dz, \quad f) \int_\gamma \frac{\sin z}{(z-\frac{1}{2})^2} \; dz$$

6. (*) EK, p657; 1,2,3,4

7. a) (*) Est-il possible de calculer $Ln\left((1+i)^i\right)$? Pourquoi? Si la réponse est affirmative, calculer ce complexe.
   b) On pose $f_+(z) = Ln(1+iz)$ et $f_-(z) = Ln(1-iz)$ et $f(z) = f_+(z) - f_-(z)$. Où cette fonction f est-elle holomorphe?
   c) Montrer que la restriction à $\mathbb{R}$ de la fonction if est une fonction à valeurs réelles. Déterminer cette fonction.
   d) (*) Où la fonction $z \mapsto \frac{z^{1/2}}{z-i}$ est-elle holomorphe?

8. (*) EK, p657; 8,11,14

9. (*) Si $a > 1$ calculer l'intégrale suivante en utilisant la technique des fonctions holomorphes.

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a + \cos x} dx.$$

10. (*) La fonction $z \in \mathbb{C} \mapsto \sin z$ est-elle bornée? Pourquoi?

11. (*) Soit la proposition suivante: "la fonction $z \mapsto e^{-z^2}$ tend vers 0 à l'infini". Cette proposition est-elle vraie? fausse? Pourquoi?

    Pourquoi la proposition suivante est-elle fausse? "Il existe une fonction f holomorphe dans la boule ouverte centrée à l'origine et de rayon 2, qui s'annule en 0 et telle que $f(z) > 0$ pour $|z| = 1$.

[1] un complexe z_0 est appelé singularité isolée de f si f est holomorphe dans une boule centrée en z_0 excepté en z_0

12. Montrer que si f est holomorphe dans $\mathbb{C}$ et si $z \mapsto \frac{f(z)}{z}$ est borné dans $\mathbb{C}_0$ alors la fonction f est un multiple de la fonction $z \mapsto z$.

13. *Références: EK 13.4 et 18.x; voir aussi relation entre égalité des dérivées croisées pour un champ vectoriel $[f_1, f_2]$ et existence d'un champ scalaire dont le gradient est ce champ vectoriel (c'est-à-dire aussi primitivation dans un "bon ouvert" de $\mathbb{R}^2$)*

    Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ ($\mathbb{R}^2$). Pour rappel, une fonction u de classe C_2 dans Ω est dite harmonique dans Ω lorsqu'elle est annulée par le laplacien:

    $$\Delta u = D_x^2 u + D_y^2 u = 0.$$

    Si u est à valeurs réelles, une fonction v de classe C_2 dans Ω, à valeurs réelles, telle que $F = u + iv$ soit holomorphe dans Ω est appelée *conjugué harmonique de* u dans Ω.

    Une fonction harmonique u dans un ouvert Ω, à valeurs réelles, admet-elle toujours un conjugué harmonique dans Ω? Pourquoi? Quelle condition (standard) sur l'ouvert Ω peut-on imposer afin qu'un tel conjugué harmonique existe? Pourquoi?

    Interprétation de ces champs, de leurs courbes de niveau: cf notamment EK Ch 18 ("courbes équipotentielles et lignes de forces")

    Appliquer ce qui précède à la fonction u définie par $u(z) = u(x, y) = \ln(\sqrt{x^2 + y^2}) = \ln(|z|)$ (avec $z = x + iy,\ x, y \in \mathbb{R}$).

Analyse II

Liste “type” 5

Solutions

Les solutions sont disponibles en format pdf (par exemple sur le site web www.afo.ulg.ac.be) (solutions à la liste 5 de 2006-2007). Seul changement: exercice numéro 2.

Exercice 2. Si f et $\overline{f}$ sont holomorphes, il en est de même de $\Re f = \frac{f+\bar{f}}{2}$ et de $\Im f = \frac{f-\bar{f}}{2i}$. Ces deux fonctions étant à valeurs réelles, holomorphes, elles sont donc constantes dans le connexe Ω; dès lors f l'est aussi.

Toute fonction constante étant holomorphe, la réciproque est claire.