Analyse II

Liste “type” 7

Mardis 22 et 29 novembre 2011

REMARQUES pour les séances de répétition
- A la répétition: exercices *

FONCTIONS D’UNE VARIABLE COMPLEXE, 2eme partie, suite

1. Soient f, g deux fonctions holomorphes dans l’ouvert connexe Ω. Montrer que si la fonction $F = \overline{f}\, g$ est holomorphe dans Ω, alors f est constant dans Ω ou g est identiquement nul dans Ω.

2. (*) Soit$f$ une fonction holomorphe dans $\Omega = \mathbb{R}\times]-\delta, \delta[$ $(\delta > 0)$. Montrer que si $f(x) \in \mathbb{R}$ pour tout $x > 0$ alors $f(x) \in \mathbb{R}$ pour tout réel x.

3. a) Soit f une fonction holomorphe dans Ω et soit un chemin fermé γ de Ω.
   - On a $\int_\gamma f(z)dz = 0$ Vrai □ Faux□
   - On a $\int_\gamma Df(z)dz = 0$ Vrai □ Faux□

   b) Si $z_0 \in \Omega$ est un zéro d’ordre p pour f (holomorphe dans Ω) alors la fonction $F\ :\ z \mapsto \frac{f(z)}{(z-z_0)^p}$ se prolonge en une fonction holomorphe en z_0 Vrai □ Faux□
   de même que $1/F$ Vrai □ Faux□

   c) Il existe une fonction holomorphe au voisinage de 0 (exclus) telle que $Df(z) = \frac{1}{z}$ Vrai □ Faux□

   Justifier chaque fois les réponses.

4. Soient $z_1, \ldots, z_J \in \mathbb{C}$, $p \in \mathbb{N}$, $C > 0$ et f est holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus \{z_1, \ldots, z_J\}$. Montrer que si chacun des z_j est un pôle pour f et si f vérifie $|f(z)| \le C|z|^p$ pour $|z|$ suffisamment grand alors f est une fraction rationnelle.

5. (*) Où les fonctions suivantes sont-elles holomorphes? Quelles sont leurs singularités isolées? De quels types sont-elles? $(\theta \in \mathbb{R})$

$$
\begin{array}{lll}
f_1(z) = \frac{1}{z^4+2z^2+1} & f_2(z) = \frac{\sin z - z + \frac{z^3}{6}}{z^7} & f_3(z) = \sin(\frac{1}{z}) \\
f_4(z) = \frac{1}{\sin(1/z)} & f_5(z) = \tan z & f_6(z) = \frac{1}{z^2-2z\cos\theta+1} \\
f_7(z) = \frac{\sinh(\pi z)}{z^2+1} & f_8(z) = \frac{Ln(z+1)}{z} & f_9(z) = \frac{1}{z-z^3} \\
f_{10}(z) = \frac{e^{1/z}}{1-z} & f_{11}(z) = e^{z+1/z} & f_{12}(z) = \frac{\sinh z}{z^2}.
\end{array}
$$

6. EK p707 : 1(*), 2(*), 6, 10, 13(*)

7. (*) Soit la fonction
$$f(z) = \frac{z^2}{1+z^2}e^{1/z}.$$
   a) Quelles sont ses singularités isolées? De quels types sont-elles?

   b) On pose $\gamma_r(t) = re^{it},\ t \in [0, 2\pi]$, avec $r > 0,\ r \neq 1$. Déterminer $\int_{\gamma_r} f(\frac{1}{z})dz$.

   c) Déterminer les coefficients a_0 et a_{-1} du développement de Laurent de f en 0.

8. (*) Soit z_0 une singularité isolée pour f.
   a) Si z_0 est un pôle d’ordre p pour f, quel est le type de singularité de z_0 pour Df?
   b) Si z_0 est une singularité essentielle pour f, quel est le type de singularité de z_0 pour Df?
   c) Déterminer le coefficient a_{-1} (le résidu) du développement de Laurent de Df en z_0.

FB, November 9, 2011 (V1:04-11-06)

Analyse II

Liste “type” 7

Solutions

Les solutions sont disponibles en format pdf (par exemple sur le site web www.afo.ulg.ac.be) : rubrique “solutions à la liste 7 de 2006-2007”.

Remarque: attention au changement de numérotation des exercices dans la liste 7 des différentes années académiques.