

## ANALYSE II

Liste "type" 8

Mardi 06-12-11

REMARQUES pour les séances de répétition

- A la répétition: exercices \*

- **Attention: TD prévu le vendredi 9 décembre 2011**–liste d'exercices à préparer: voir pages web

## FONCTIONS D'UNE VARIABLE COMPLEXE, 2eme partie, suite

RESULTAT AUXILIAIRE (prolongements holomorphes)

Etant donné une fonction holomorphe définie de façon naturelle (souvent explicitement, analytiquement) dans un ouvert de  $\mathbb{C}$ , il est utile d'essayer de trouver une fonction holomorphe qui la prolonge dans un ouvert plus grand.

Par exemple, la fonction  $\sqrt{1-z^2} := (1-z)^{1/2}(1+z)^{1/2}$  est définie de façon naturelle dans  $U = (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}) \cup ]-1, 1[$  et y est holomorphe. Elle étend la fonction  $f(x) = \sqrt{1-x^2}, x \in ]-1, 1[$ .

La fonction  $\sqrt{z^2-1} := (z-1)^{1/2}(z+1)^{1/2}$  est aussi définie de façon naturelle dans le complémentaire de  $[-1, +\infty[$  ou dans le complémentaire de  $] -\infty, 1]$ . On peut l'étendre dans le complémentaire du segment  $[-1, 1]$ , ce qui donne alors une extension holomorphe à la fonction  $\sqrt{x^2-1}, x > 1$  par exemple.

Plus précisément, on a le résultat suivant (il en existe d'autres; ils sont basés sur le calcul d'arguments).

Soient  $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$  avec  $\alpha + \beta \in \mathbb{Z}$ ,  $a < b$ , et soient

$$f(z) = \operatorname{Ln}(z-a) - \operatorname{Ln}(z-b), \quad g(z) = (z-a)^\alpha (z-b)^\beta.$$

Chacune de ces fonctions est définie et holomorphe dans le complémentaire d'une demi-droite. Chacune peut se prolonger holomorphiquement dans le complémentaire du segment  $[a, b]$ .

## EXERCICES

- (\*) Déterminer le résidu en chacune des singularités isolées des fonctions 1,2,3,4,8 de l'exercice 5, liste 7 de 2009-2010.
- EK, p 717 : de 3 à 12
- EK, p 717 : de 14 à 25
- Soit  $\gamma_r(t) = re^{it}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$  ( $r > 1$ ) et soit  $\sqrt{z^2-1} := \sqrt{z-1}\sqrt{z+1}$  (avec détermination principale de l'argument). Montrer que

$$I_r = \int_{\gamma_r} \sqrt{z^2-1} dz = -i\pi.$$

*Suggestion.* La fonction  $f(z) = \sqrt{z+1}\sqrt{z-1}$  (notée  $\sqrt{z^2-1}$ ) est holomorphe dans  $\Omega := \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ .

Méthode 1. La fonction  $F(z) = \sqrt{1+z}\sqrt{1-z}$  est holomorphe dans le complémentaire de  $] -\infty, -1] \cup [1, +\infty[$  et on a  $f(z) = zF(1/z)$  dans  $\Omega$ . On obtient  $I_r = ir \int_0^{2\pi} dt e^{it} f(re^{it}) = \int_{\gamma_{1/r}} dz \frac{F(z)}{z^3} = i\pi D^2 F(0) = -i\pi$ .

Méthode 2. Au signe près, l'intégrale à calculer est égale à l'intégrale de la même fonction sur le contour "en haltères" autour de  $-1$  et de  $1$ , contour que l'on ramène sur le segment  $[-1, 1]$  par passage à la limite.

- Soit  $\gamma(t) = e^{it}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ . Calculer

$$(*) (a) \int_{\gamma} \frac{\sin z}{z \sinh z} dz, \quad (*) (b) \int_{\gamma} \frac{\sin z - \sinh z}{z^8} dz, \quad (c) \int_{\gamma} e^{\frac{1}{z}} dz$$

$$(*) (d) \int_{\gamma} \sin\left(\frac{1}{z}\right) dz, \quad (*) (e) \int_{\gamma} \frac{1}{\sin\left(\frac{1}{z}\right)} dz$$

6. Soit  $\gamma$  un chemin injectif régulier “orienté” aire à gauche qui paramétrise la courbe  $\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1 - i| = 1\}$ . Calculer

$$a) \int_{\gamma} \frac{\operatorname{Ln} z}{z + 2} dz, \quad b) \int_{\gamma} \frac{\operatorname{Ln} z}{z - 1 - i\frac{\sqrt{3}}{3}} dz.$$

7. - (\*) Soit  $\gamma$  un chemin régulier par morceaux, injectif, “orienté” aire à gauche et qui paramétrise le bord du carré de sommets  $0, 3, 3 + 3i, 3i$ . Calculer

$$a) \int_{\gamma} \frac{1}{z + 1 + i} dz \quad b) \int_{\gamma} \frac{1}{z - 1 - i} dz.$$

- Soit  $\gamma(t) = e^{it}$ ,  $t \in [0, 4\pi]$ . Calculer

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z^4(z + 1 + 2i)} dz$$

8. Si elles existent, calculer les intégrales suivantes

$$(*) (a) \int_0^{2\pi} \frac{1}{5 - 4 \sin x} dx, \quad (*) (b) \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(x^2 - 2x + 5)^2} dx, \quad (c) \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + x^6} dx,$$

$$(*) (d) \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + x^3} dx, \quad (*) (e) \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} dx.$$

9. (Transformation de Joukowski) On donne la fonction  $f$  par

$$f(z) = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right).$$

- (a) En quel type de courbe cette fonction transforme-t-elle les cercles centrés à l'origine de rayon différent de 1 (resp. les segments de droites)?
- (b) Graphiquement montrer que cette fonction transforme les cercles passant par le point de coordonnées  $(1, 0)$  (resp.  $(-1, 0)$ ) en “profil d'aile d'avion”.
- (c) Montrer que  $f$  établit une bijection de  $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$  dans  $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ . En déterminer l'inverse et montrer qu'il s'agit encore d'une fonction holomorphe.

ANALYSE II

Liste “type” 8

Solutions

---

Les solutions sont disponibles en format pdf à partir du site web

<http://www.afo.ulg.ac.be/fb/ens.html>

et des pages relevant du cours

*Analyse II, Math0007-4, 2 bac Inges*

rubrique “solutions à la liste 8 de 2006-2007”