Analyse II

Liste “type” 9

(Mardi 13), vendredi 16 et mardi 20 décembre 2011

REMARQUES pour les séances de répétition
- A la répétition: exercices *

INTRODUCTION A L’ANALYSE DE FOURIER

1. (*) Soit $a > 0$. Déterminer la transformée de Fourier de la fonction f donnée ci-dessous de deux manières différentes (par “méthode de variables complexes” et en utilisant le théorème de Fourier).

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + a^2}$$

2. Déterminer la transformée de Fourier des fonctions f suivantes ($a > 0$)

$$(i) f(x) = \frac{1}{a}\left(1 - \frac{|x|}{a}\right)\chi_{[-a,a]}(x), \quad (ii)(*) f(x) = e^{-|x-1|}$$

$$(iii)(*) f(x) = e^{2ix}e^{-|3x-1|}, \quad (iv)(*) f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ -e^{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}, \quad (v) f(x) = x^2 e^{-3|x|}.$$

(*) Ces transformées sont-elles bornées dans $\mathbb{R}$, intégrables (dans $\mathbb{R}$), de carré intégrable (dans $\mathbb{R}$)?

3. Montrer que, pour tout naturel strictement positif m, on a

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2m+1)x}{\sin x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

En déduire que

$$\int_0^{\to +\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Suggestion : utiliser les propriétés des transformées de Fourier

4. Si f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que $x \mapsto xf(x)$ soit de carré intégrable, on pose

$$\Delta_f = \int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2 dx.$$

(i) Pour $f(x) = e^{-x^2/4}$, montrer que

$$\Delta_f = \sqrt{2\pi}.$$

(ii) En déduire l’égalité suivante (principe d’incertitude d’Heinsenberg dans le cas d’une Gaussienne)

$$\Delta_f \Delta_{\widehat{f}} = \pi^2$$

pour $f(x) = e^{-x^2/4}$ et en utilisant la notation $\widehat{f}$ pour la transformée de Fourier négative de f.

5. (*) Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$ à support compact[1]. Montrer que $f \in L^1(\mathbb{R})$, que sa transformée de Fourier $\widehat{f}$ se prolonge en une fonction holomorphe dans $\mathbb{C}$ et qu’il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\left|\widehat{f}(z)\right| \le C e^{A|\Im z|}, \ z \in \mathbb{C}$$

lorsque le support de f est inclus dans $[-A, A]$ ($A > 0$).

[1] Le support d’une fonction supposée définie dans $\mathbb{R}$ est l’adhérence dans $\mathbb{R}$ de l’ensemble des points où elle ne s’annule pas. Son complémentaire est le plus grand ouvert d’annulation de f. Bien remarquer qu’une fonction peut être nulle en des points de son support.

6. (i) Soit une fonction $f \in C_\infty(\mathbb{R})$ à support compact, non identiquement nulle[2]. Montrer que sa transformée de Fourier $\widehat{f}$ appartient aussi à $C_\infty(\mathbb{R})$ mais qu'elle n'est pas à support compact.
Suggestion : utiliser le fait que $\widehat{f}$ se prolonge en une fonction holomorphe dans $\mathbb{C}$
(ii) Soit $a > 0$ et soit $g_a(x) = e^{-ax^2}$. Connaissant l'intégrale de Poisson et en utilisant des "méthodes de variables complexes", montrer que $\mathcal{F}^{\pm}_y g_a = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-y^2/(4a)}$ quel que soit $y \in \mathbb{R}$.
(ii) Soit une fonction intégrable f dont le support est inclus dans $[0, +\infty[$. Montrer que la transformée de Fourier $\mathcal{F}^+$ se prolonge en une fonction holomorphe dans le demi-plan $\{z \in \mathbb{C} \ : \ \Im z > 0\}$.

7. (*) Enoncer l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans l'espace $L^2([-1,1])$.
Comparer les espaces $L^2([-1,1])$ et $L^1([-1,1])$ (vis-à-vis de l'inclusion).
Démontrer alors qu'il existe une constante $C > 0$ telle que
$$\|f\|_{L^1([-1,1])} \leq C \|f\|_{L^2([-1,1])}, \quad \forall f \in L^2([-1,1])$$

8. (*) On définit la fonction Γ (intégrale eulérienne) par
$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt, \ x \in]0, +\infty[.$$
(i) Montrer que cette définition a un sens (ie que $t \mapsto e^{-t}t^{x-1}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ quel que soit $x > 0$)
(ii) Montrer que, pour tous $x, y > 0$, on a
$$\Gamma\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \sqrt{\Gamma(x)\ \Gamma(y)}.$$
(iii) Montrer que Γ se prolonge en une fonction holomorphe dans $\{z \in \mathbb{C} \ : \ \Re z > 0\}$ et que l'on a $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ pour tout complexe z de partie réelle strictement positive.

9. On donne f, fonction continue sur $\mathbb{R}$, telle que $x \mapsto x^2 f(x)$ soit borné sur $\mathbb{R}$. Démontrer que
$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} f(x+m) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}^-_{2\pi m} f \ e^{2i\pi m x}$$
en précisant dans quels espaces les convergences ont lieu. En déduire que
$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x+m)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)}, \quad x \notin \mathbb{Z}.$$

10. (*) On donne la fonction
$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \in]-\pi, 0[\\ 1 & \text{si } x \in]0, \pi[\\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
(i) Déterminer le développement en série trigonométrique de Fourier de cette fonction dans $L^2([-\pi, \pi])$ en simplifiant la réponse au maximum; la réponse finale ne doit comporter que des fonctions sinus et cosinus.
(ii) En déduire que
$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

11. On se place dans $L^2([0, \pi])$.
(i) Déterminer le développement en série trigonométrique de Fourier de $f(x) = \sin^2 x$. Exprimer le résultat en utilisant uniquement des fonctions sin et cos.

[2] Valable aussi pour f de carré intégrable et à support compact

(ii) Déterminer le développement en série trigonométrique de Fourier de $g(x) = \sin x$. Exprimer le résultat en utilisant uniquement des fonctions sin et cos.
(iii) En déduire l'égalité suivante

$$\frac{\pi}{2} = 1 - 2\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{4m^2 - 1}.$$

12. Déterminer le développement en série trigonométrique de Fourier dans $L^2[-\pi, \pi]$ de la fonction $f(x) = x,\ x \in [-\pi, \pi]$; exprimer le résultat en utilisant uniquement des fonctions sin et cos.

    Déduire des calculs précédents que
    $$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

13. Dans l'espace $L^2([-1, 1])$ on a le développement suivant

    $$x^2 = \sum_{m=0}^{+\infty} a_m \cos(\pi m x).$$

    En prenant le produit scalaire de chacun des deux membres de l'égalité avec la fonction $x \mapsto \cos(\pi x)$, déterminer la valeur de a_1.