Analyse II Liste pour le TD du 09 décembre 2011

Exercice 1. a) Calculer la longueur de la courbe $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \cosh x,\ x \in [0,1]\}$ et en donner une représentation dans un repère orthonormé.

b) Soient $\vec{f}(x,y) = [x+y, -x]$ et $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 + 4x^4 - 4x^2 = 0, x \geq 0\}$.
- Montrer que $\vec{\gamma}(t) = [\sin t, \sin 2t]$ avec $t \in [0,\pi]$ est un paramétrage de Γ.
- Calculer $\int_\Gamma f_1 dx + f_2 dy$.

Exercice 2. a) Soit γ le bord d'un carré dont l'intérieur contient l'origine. Calculer

$$\int_\gamma e^{1/z^2} dz \quad \text{et} \quad \int_\gamma z e^{1/z^2} dz$$

b) Soit γ le bord du carré centré en 1/2, de côtés parallèles aux axes et longueur 1. Déterminer

$$\int_\gamma \overline{z}\, dz \quad \text{et} \quad \int_\gamma (\Re z)^2\ dz.$$

Exercice 3. En utilisant les intégrales paramétriques, on a vu que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cos(bx) dx = \sqrt{\pi} e^{-b^2/4}$$

Obtenir ce résultat par des outils de variables complexes[4]

Exercice 4. Calculer (si possible) les intégrales suivantes

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{5} - \cos\theta}, \quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{4+x^4} dx$$

Exercice 5. On donne explicitement les fonctions suivantes

$$f_1(z) = \frac{\sin z}{z^2}, \quad f_2(z) = \frac{e^{z^2+1}}{z^2+1} \quad f_3(z) = \frac{\sin z}{\sin(iz)}.$$

a) Où ces fonctions sont-elles holomorphes?
b) Quelles sont les sigularités isolées? De quels types sont-elles?
c) Déterminer le résidu en chacune des singularités isolées.
d) Déterminer le développement de Laurent (expressions explicites de h, H et du développement en série de puissances entières) de f_1 au voisinage des singularités isolées.

Exercice 6. Vrai ou faux? Justifier.

- Si f est holomorphe dans $\mathbb{C}$ et admet une limite nulle à l'infini, alors f est nul dans $\mathbb{C}$.
- La fonction $z \mapsto \overline{\exp(\overline{z})}$ est holomorphe dans $\mathbb{C}$.
- Si la fonction f, holomorphe dans $\mathbb{C}$, admet un zéro de multiplicité 1 en 0, alors la fonction $z \mapsto f(\frac{1}{z})$ admet un pôle d'ordre 1 en 0.
- La fonction $z \mapsto \sum_{m=1}^{+\infty} (z-i)^m$ est holomorphe dans $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

FB, November 23, 2011(V1: 23-11-11)

[4] *Suggestion.* On peut supposer $b > 0$. Intégrer la fonction $z \mapsto e^{-z^2}$ sur les bords des rectangles $[-R,R] \times [0, b/2]$ et passer à la limite quand $R \mapsto +\infty$.