Analyse II Liste pour le TD du 08 novembre 2013

Exercice 1. L'expérience montre que, dans un champ de température, la chaleur est transmise dans la direction et le sens dans lesquels la température décroît le plus vite. Trouver cette direction et ce sens en tout point du champ (et, plus particulièrement, au point P donné) dans le cas où le champ est représenté par les fonctions scalaires ci-dessous.

$$T(x,y) = x^2 - y^2,\ P(2,1); \qquad T(x,y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right),\ P(2,2)$$

Esquisser les isothermes et les vecteurs unitaires qui correspondent à la direction et au sens obtenus au point P.

Exercice 2. 2.1) Soit la courbe du plan d'équation cartésienne $4x^2 + 8x + y^2 = 0$ dans un repère orthonormé. Représenter cette courbe et déterminer (si possible) la valeur des intégrales suivantes lorsque f est donné par $f(x,y) = y\ (x+1)$ en n'oubliant pas de préciser (dans les deux cas) s'il faut considérer la courbe orientée ou non orientée

$$\int_{\mathcal{C}} f(x,y)\ dx, \qquad \int_{\mathcal{C}} f\ ds$$

2.2) Soit le cylindre d'axe Z, dont la base est le disque centré à l'origine, de rayon r, limité par le plan $z = 0$ et $z = h$ $(r, h > 0)$. On considère la surface $\mathcal{S}$, formée de la surface latérale de ce cylindre “limité” , ainsi que par son “couvercle”, i.e. la surface horizontale à la hauteur h qu'il découpe sur le plan $z = h$. On donne aussi la fonction vectorielle $\vec{f}(x,y,z) = [x^2y, 0, xyz]$. Vérifier la formule de Stokes pour $\vec{f}$ et la surface $\mathcal{S}$.

2.3) Calculer la longueur de la courbe $\Gamma = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \cosh x,\ x \in [0,1]\right\}$ et en donner une représentation dans un repère orthonormé.

2.4) Soient $\vec{f}(x,y) = [x+y, -x]$ et $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 + 4x^4 - 4x^2 = 0, x \geq 0\}$.
- Montrer que $\vec{\gamma}(t) = [\sin t, \sin 2t]$ avec $t \in [0,\pi]$ est un paramétrage de Γ.
- Calculer $\int_{\Gamma+} f_1 dx + f_2 dy$, sachant qu'une intégrale curviligne est indépendante du paramétrage pour autant qu'il soit injectif (sauf peut-être aux extrémités) et de classe C_1.

Exercice 3. Soient les réels a, b tels que $0 < a < b$. On pose

$$f(x) = e^{-ax}\chi_{]0,+\infty[}(x), \quad g(x) = e^{-bx}\chi_{]0,+\infty[}(x)$$

3.1) Déterminer (si possible) l'expression explicite du produit de convolution de f et g en tout réel.

3.2) Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{(f*g)(x)}{x} dx = \frac{\ln(b/a)}{b-a}.$$

Suggestions: transformer $1/x$ en une intégrale ou utiliser le théorème de dérivation des intégrales paramétriques.

Exercice 4. 4.1) Soient a, b réels tels que $a < b$ et soient $r, s \in \mathbb{R}$. Si possible, déterminer les transformées de Fourier des fonctions $\chi_{[a,b]}$ et $x \mapsto e^{-r|x+s|}$. Au besoin, donner des précisions sur les paramètres a, b, r, s.

4.2) Sachant que $\mathcal{F}^{\pm} g_\sigma = \sqrt{\frac{\pi}{\sigma}} g_{1/(4\sigma)}$ si $\sigma > 0$ et $g_\sigma(t) = e^{-\sigma t^2}$, déterminer la transformée de Fourier (-) de la fonction $x \mapsto xe^{-x^2/2}$.

4.3) Quel que soit le réel non nul a, déterminer la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(x)\sin(x)}{x\ (a^2+x^2)} dx$$

Exercice 5. Pour des compléments d'information sur cet exercice (contexte, applications), voir E. Kreyszig page 750 (et suivantes), à propos de la *théorie du potentiel*.

Quelques définitions
- Une fonction harmonique dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ est une fonction à valeurs réelles de classe C_2 dans Ω et qui est annulée par le Laplacien dans l'ouvert.
- Le couple (u, v) de fonctions à valeurs réelles, dérivables dans un ouvert de $\mathbb{R}^2$, vérifient les équations de Cauchy-Riemann (forme réelle) dans cet ouvert lorsque l'on a

$$D_x u = D_y v \quad \text{et} \quad D_y u = -D_x v \qquad \text{dans l'ouvert.}$$

On dit que v est un conjugué harmonique de u dans l'ouvert.

5.1) Montrer que si u, v sont de classe C_2 dans un ouvert et vérifient les équations de Cauchy-Riemann, alors elles sont harmoniques.
5.2) Soit $u(x, y) = x^2 - y^2 - y$. Montrer que u est harmonique dans le plan et en trouver un conjugué harmonique.

Analyse II Corrigé succinct du TD du 08 novembre 2013

Exercice 1. Notons $T_1(x,y) = x^2 - y^2$ et $T_2(x,y) = \text{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$.

La fonction T_1 appartient à $C_\infty(\mathbb{R}^2)$ et la direction et le sens dans lesquels la température décroît le plus vite sont ceux de l'opposé du gradient de T_1

$$-grad\ T_1(x,y) = [-2x, 2y], \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2;$$

en particulier,

$$-grad\ T_1(2,1) = [-4, 2].$$

Les isothermes sont les courbes d'équation cartésienne $T_1(x,y) = x^2 - y^2 = r$ (où r est un réel quelconque). Il s'agit donc d'hyperboles équilatères. En chaque point, le gradient est orthogonal à la tangente à la courbe.

La fonction T_2 appartient à $C_\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,y)\ : y \in \mathbb{R}\})$ et

$$-grad\ T_2(x,y) = \left[\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{-x}{x^2+y^2}\right], \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,y)\ : y \in \mathbb{R}\};$$

en particulier,

$$-grad\ T_2(2,2) = [1/4, -1/4].$$

Les isothermes sont les courbes d'équation cartésienne $T_2(x,y) = \text{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) = r$ ou encore $y = \text{tg}(r)\ x$ (où $r \in]-\pi/2, \pi/2[$). Il s'agit donc des droites passant par l'origine (sauf l'axe Y). En chaque point, le gradient est orthogonal à la droite considérée.

Exercice 2. 2.1) L'équation cartésienne de la courbe peut se réécrire $(x+1)^2 + \frac{y^2}{4} = 1$. Il s'agit donc d'une ellipse de centre $(-1,0)$ dont la longueur du "demi-grand axe" (parallèle à l'axe Y) est égale à 2 et celle du "demi-petit axe" (parallèle à l'axe X) est égale à 1. Un paramétrage de la courbe est donné par

$$\vec{\gamma} : t \in [0, 2\pi] \mapsto [-1 + \cos(t), 2\sin(t)].$$

En considérant l'orientation donnée par le paramétrage, la première intégrale devient

$$\int_{\mathcal{C}} f(x,y)\ dx = \int_0^{2\pi} [2\sin t \cos t, 0] \bullet [-\sin t, 2\cos t]\ dt = -\int_0^{2\pi} 2\sin^2 t \cos t\ dt = 0.$$

La deuxième intégrale est indépendante de l'orientation de la courbe. On a

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{C}} f\ ds &= \int_0^{2\pi} 2\sin t \cos t \sqrt{\sin^2 t + 4\cos^2 t}\ dt \\
&= \int_0^{2\pi} \sin(2t) \sqrt{\frac{5}{2} + \frac{3}{2}\cos(2t)}\ dt \\
&= -\frac{2}{9} \int_0^{2\pi} D\left(\frac{5}{2} + \frac{3}{2}\cos(2t)\right)^{3/2}\ dt \\
&= 0.
\end{aligned}$$

2.2) Un calcul direct donne $rot\vec{f} = [xz, -yz, -x^2]$. Un paramétrage de la surface latérale du cylindre est donné par

$$\vec{\phi_l} : (t,s) \in [0, 2\pi] \times [0, h] \mapsto [r\cos t, r\sin t, s].$$

On obtient alors

$$D_t\vec{\phi_l}(t,s) \wedge D_s\vec{\phi_l}(t,s) = [r\cos t, r\sin t, 0]$$

et

$$\begin{aligned}\iint_{S_l} rot\vec{f} \bullet \vec{n}\ d\sigma &= \int_0^{2\pi}\int_0^h ([rs\cos t, -rs\sin t, -r^2\cos^2 t] \bullet [r\cos t, r\sin t, 0])\ ds\ dt\\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^h r^2 s\cos(2t)\ ds\ dt\\ &= 0.\end{aligned}$$

De plus, un paramétrage du "couvercle" est donné par

$$\phi_c : (t,s) \in [0,2\pi]\times[0,r] \mapsto [s\cos t, s\sin t, h].$$

En respectant l'orientation déjà choisie pour la surface latérale, à partir de

$$D_s\vec{\phi}_c(t,s) \wedge D_t\vec{\phi}_c(t,s) = [0,0,s]$$

on obtient

$$\begin{aligned}\iint_{S_c} rot\vec{f} \cdot \vec{n}\ d\sigma &= \int_0^{2\pi}\int_0^r ([sh\cos t, -sh\sin t, -s^2\cos^2 t] \bullet [0,0,s])\ ds\ dt\\ &= -\int_0^{2\pi}\int_0^r s^3\cos^2 t\ ds\ dt = -\frac{\pi r^4}{4}.\end{aligned}$$

Au total,

$$\iint_{\mathcal{S}} rot\vec{f} \bullet \vec{n}\ d\sigma = \iint_{S_l} rot\vec{f} \bullet \vec{n}\ d\sigma + \iint_{S_c} rot\vec{f} \bullet \vec{n}\ d\sigma = -\frac{\pi r^4}{4}.$$

Par ailleurs, un paramétrage de la frontière de la surface $\mathcal{S}$ (orienté pour respecter la "règle du tire-bouchon" par rapport à l'orientation choisie pour $\vec{n}$) est donné par $\gamma : t \in [0,2\pi] \mapsto [r\cos t, r\sin t, 0]$. Par conséquent,

$$\oint_\gamma f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz = \int_0^{2\pi} [r^3 \sin t\cos^2 t, 0, 0] \bullet [-r\sin t, r\cos t, 0]\ dt = -\frac{\pi r^4}{4},$$

d'où la conclusion.

2.3) Un paramétrage régulier de la courbe est donné par $\vec{\gamma} : x \in [0,1] \mapsto [x, \cosh x]$. Il s'ensuit que $D\vec{\gamma}(x) = [1, \sinh x]$ et $\|D\vec{\gamma}(x)\| = \sqrt{1+\sinh^2 x} = \sqrt{\cosh^2 x} = \cosh x$ et que la longueur de la courbe est égale à

$$\int_0^1 \|D\vec{\gamma}(x)\|\ dx = \int_0^1 \cosh x\ dx = \sinh(1).$$

2.4) Si $x(t) = \sin(t)$ et $y(t) = \sin(2t)$ avec $t \in [0,\pi]$, alors $x(t) \geq 0$ et on vérifie aisément que $[y(t)]^2 + 4[x(t)]^4 - 4[x(t)]^2 = 0$, de sorte que le point $(x(t), y(t))$ appartient à Γ.

Inversement, tout point de la courbe peut être représenté grâce au paramétrage proposé. En effet, supposons que (x,y) appartienne à Γ. On a alors $0 \leq y^2 = 4x^2(1-x^2)$ donc $x^2 \leq 1$. Comme x est positif, on obtient plus précisément $x \in [0,1]$ et il existe donc $t \in [0,\pi]$ tel que $x = \sin(t)$. On obtient alors $y^2 = 4x^2(1-x^2) = 4\sin^2(t)\ \cos^2(t) = \sin^2(2t)$ donc

$$y = \sin(2t) \quad \text{ou} \quad y = -\sin(2t) = \sin(2(\pi - t).$$

Dès lors, on a

$$x = \sin(t), \quad y = \sin(2t) \qquad \text{avec } t \in [0,\pi]$$

ou

$$x = \sin(t) = \sin(\pi - t), \quad y = -\sin(2t) = \sin(2(\pi - t)) \qquad \text{avec } \pi - t \in [0,\pi].$$

D'où la conclusion.

Ce paramétrage est injectif sur $]0,\pi[$ car, sur cet intervalle, les égalités $\sin(t_1)=\sin(t_2)$ et $\sin(2t_1)=\sin(2t_2)$ donnent $\cos(t_1)=\cos(t_2)$ donc $t_1=t_2$. On notera toutefois que $\vec{\gamma}(0)=[0,0]=\vec{\gamma}(\pi)$: la courbe associée au paramétrage est fermée.

Il est évident que ce paramétrage est aussi continûment dérivable sur $\mathbb{R}$ et que

$$D_t\vec{\gamma}(t)=[\cos(t),2\cos(2t)],\ \forall t\in\ [0,\pi].$$

Dès lors, comme la fonction vectorielle $\vec{f}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$, l'intégrale curviligne a bien un sens (puisqu'il s'agit d'intégrer des fonctions continues sur le compact $[0,\pi]$) et on a

$$\int_{\Gamma^+} f_1dx+f_2dy=\int_0^\pi[\sin(t)+\sin(2t),-\sin(t)]\bullet[\cos(t),2\cos(2t)]dt=\frac{8}{3}.$$

Exercice 3. 3.1) On a

$$f(y)g(x-y)=e^{-ay}\chi_{]0,+\infty[}(y)e^{-b(x-y)}\chi_{]-\infty,x[}(y)=\left\{\begin{array}{lll}0 & , & \text{si } x\leq 0\\ e^{-bx}e^{(b-a)y}\chi_{]0,x[}(y) & , & \text{si } x>0\end{array}\right. .$$

Ainsi, cette fonction (de y) est intégrable sur $\mathbb{R}$ que que soit le réel x et on a

$$(f*g)(x)=0\quad \text{si } x\leq 0$$

et

$$(f*g)(x)=e^{-bx}\int_{\mathbb{R}}e^{(b-a)y}\chi_{]0,x[}(y)\,dy=e^{-bx}\int_0^x e^{(b-a)y}\,dy=\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{b-a}\quad \text{si } x\leq 0.$$

Autrement dit,

$$(f*g)(x)=\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{b-a}\chi_{]0,+\infty[}(x),\ x\in\mathbb{R}.$$

3.2) Posons $f_{a,b}(x)=\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}$. Cetet fonction est continue sur $]0,+\infty[$, $\lim_{x\to 0^+}f_{a,b}(x)=b-a$ et $\lim_{x\to+\infty}x^2f_{a,b}(x)=0$. Cela entraine sont intégrabilité sur $]0,+\infty[$.

<u>Méthode 1 : Transformer $1/x$ en une intégrale.</u>
Remarquons que, $\forall x\in]0,+\infty[$, on a $\frac{1}{x}=\int_0^{+\infty}e^{-xt}\,dt$. Par le théorème de Fubini, on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{f_{a,b}(x)}{b-a}\,dx&=\frac{1}{b-a}\int_0^{+\infty}(e^{-ax}-e^{-bx})\left(\int_0^{+\infty}e^{-xt}\,dt\right)dx\\&=\frac{1}{b-a}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\left(e^{-(a+t)x}-e^{-(b+t)x}\right)dx\,dt\\&=\frac{1}{b-a}\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{a+t}+\frac{-1}{b+t}\right)\,dt\\&=\frac{1}{b-a}\left[\ln\left(\frac{a+t}{b+t}\right)\right]_0^{+\infty}=\frac{1}{b-a}\ln\left(\frac{b}{a}\right)\end{aligned}$$

<u>Méthode 2 : utiliser le théorème de dérivation des intégrales paramétriques.</u>
Fixons $a>0$ et considérons la fonction

$$I:b\in]0,+\infty[\mapsto\int_0^{+\infty}f_{a,b}(x)\,dx.$$

L'ensemble $\Lambda=]0,+\infty[$ dans lequel varie b est un ouvert de $\mathbb{R}$ et l'ensemble d'intégration $A=]0,+\infty[$ est mesurable. De plus,

(i) $\forall b\in\Lambda,\ (x\mapsto f_{a,b}(x))\in L_1(A)$;

(ii) pour presque tout $x \in A$, $(b \mapsto f_{a,b}(x)) \in C_1(\Lambda)$;

(ii) $\forall$ K compact de Λ, $\exists$ $r > 0$ tel que $K \subseteq [r, +\infty[$ et on a $|D_b f_{a,b}(x)| = e^{-bx} \leq e^{-rx} \quad \forall b \in K$, la fonction $x \mapsto e^{-rx}$ étant intégrable sur A.

Par le théorème de dérivation des intégrales paramétriques on en déduit alors que $I \in C_1(\Lambda)$ et que

$$D_b I(b) = \int_0^{+\infty} D_b f_{a,b}(x)\, dx = \int_0^{+\infty} e^{-bx}\, dx = \frac{1}{b}.$$

En primitivant, on obtient finalement qu'il existe $C = C_a \in \mathbb{R}$ tel que

$$I(b) = \ln(b) + C, \quad \forall b > 0$$

Comme on a $I(a) = 0$, on en conclut que $C = -\ln(a)$ de sorte que

$$I(b) = \ln(b) - \ln(a) = \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

On obtient donc au final

$$\int_0^{+\infty} \frac{f_{a,b}(x)}{b-a}\, dx = \frac{1}{b-a} I(b) = \frac{\ln(\frac{b}{a})}{b-a}.$$

Exercice 4. 4.1) La fonction $\chi_{[a,b]}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et la fonction $x \mapsto e^{-r|x+s|}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $r > 0$ et $s \in \mathbb{R}$. Par un calcul direct, on obtient

$$\mathcal{F}^-_\xi \chi_{[a,b]} = \int_a^b e^{-ix\xi}\, dx = \begin{cases} i\,\dfrac{e^{-ib\xi} - e^{-ia\xi}}{\xi} & \text{si } \xi \neq 0 \\ b - a & \text{si } \xi = 0 \end{cases}$$

et

$$\mathcal{F}^-_{x \to \xi}(e^{-r|x+s|}) = e^{is\xi} \mathcal{F}^-_{x \to \xi}(e^{-r|x|}) = 2r \frac{e^{is\xi}}{r^2 + \xi^2}, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

La transformée de Fourier positive de ces deux fonctions est alors immédiate vu que, si $g \in L^1(\mathbb{R})$, on a $\mathcal{F}^+_\xi g = \mathcal{F}^-_{-\xi} g$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$.

4.2) La fonction $x \mapsto xe^{-x^2/2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et est en fait la dérivée de $-g_{1/2}$. Dès lors,

$$\mathcal{F}^-_{x \to \xi}(xe^{-x^2/2}) = -i\xi\, \mathcal{F}^-_\xi\, g_{1/2} = -i\sqrt{2\pi}\, \xi\, e^{-\xi^2/2}, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

4.3) Pour $a \neq 0$, la fonction $x \mapsto \frac{\cos(x)\sin(x)}{x(a^2+x^2)}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ et même sur $\mathbb{R}$.

On remarque que la valeur de l'intégrale est une fonction paire en a.

Pour $a > 0$, on a successivement

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\cos(x)\sin(x)}{x(a^2+x^2)}\, dx &= \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{a^2+x^2}\, \frac{\sin(2x)}{x}\, dx \\ &= \frac{1}{16a} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}^-_x \chi_{[-2,2]}\, \mathcal{F}^+_{y \to x}(e^{-a|y|})\, dx \\ &= \frac{\pi}{8a} \int_{-2}^{2} e^{-a|x|}\, dx \;=\; \frac{\pi}{4a^2}(1 - e^{-2a}) \end{aligned}$$

en utilisant les théorèmes du transfert et de Fourier. Ainsi, pour $a \neq 0$, on obtient

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(x)\sin(x)}{x(a^2+x^2)}\, dx = \frac{\pi}{4a^2}(1 - e^{-2|a|}).$$

Exercice 5.

5.1) Calcul direct.

5.2) Le caractère harmonique de u est immédiat et, dans la deuxième partie de la question, on cherche en fait $v \in C_2(\mathbb{R}^2)$ tel que $grad\, v(x,y) = [D_x v(x,y), D_y v(x,y)] = [-D_y u(x,y), D_x u(x,y)] = [2y+1, 2x]$.[1] Comme les fonctions $f_1 : (x,y) \mapsto 2y+1$ et $f_2 : (x,y) \mapsto 2x$ sont de classe C_1 et vérifient les égalités croisées, et comme l'ouvert dans lequel on travaille ($\mathbb{R}^2$) est étoilé par rapport à l'origine, on sait que v peut être obtenu par

$$v(x,y) = \int_0^1 (f_1(tx,ty)x + f_2(tx,ty)y)\ dt.$$

Un calcul immédiat donne $v(x,y) = 2xy + x,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$ (et bien sûr cette fonction v n'est pas unique).

November 22, 2013(V1:10/11/13)

[1]Cet exercice peut aussi être résolu immédiatement.