ANALYSE III, 2014-2015, 2e bachelier ingénieur civil
Examen du 05 janvier 2015— Solutions (résumé)
Version : 28 octobre 2015 (V1 : 21/01/15)

THEORIE

Théorie 1 **Soit un ouvert Ω de $\mathbb{C}$, soient $z_1, z_2, z_3 \in \Omega$ et soit une fonction f holomorphe dans $\Omega \setminus \{z_1, z_2, z_3\}$. Enoncer et démontrer le théorème des résidus dans ce cadre.**

Théorie 2
2.1) Donner la définition de la transformée de Fourier d'une fonction intégrable dans $\mathbb{R}$. Enoncer ensuite le théorème de Fourier en exprimant toutes les transformées de Fourier explicitement (c'est-à-dire sous forme d'intégrale, en repassant à la définition).
2.2) Enoncer l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans un espace de Hilbert H, en précisant bien la signification des notations employées. Ensuite, en guise d'application, l'énoncer dans l'espace $H = L^2([0, \pi])$ (qui est aussi à définir), en utilisant les expressions explicites des produit scalaire et norme dans cet espace.

Solution. Cf cours (syllabus et cours en amphi)

EXERCICES

Exercice 1
On fixe un repère orthonormé du plan et on donne une courbe par son équation cartésienne

$$x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$$

Si $\mathcal{C}$ désigne la partie de la courbe située dans le premier quadrant, déterminer $\int_{\mathcal{C}} x \ ds$ et $\int_{\mathcal{C}} x \ dx$ en spécifiant (si besoin) l'oriention choisie. (Choisir un paramétrage injectif et régulier, mais il n'est pas nécessaire de justifier ces propriétés.)

Solution. L'équation cartésienne donnée s'écrit aussi $(x-1)^2 + y^2 = 4$; il s'agit donc d'un cercle centré en $(1, 0)$ ayant 2 comme longueur de rayon. Une représentation paramétrique (régulière, injective) de $\mathcal{C}$ est donc donnée par

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \gamma_1(t) = 1 + 2\cos(t) \\ y = \gamma_2(t) = 2\sin(t) \end{array} \right. , \quad t \in \left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$$

La première intégrale est indépendante de l'orientation, la seconde en dépend ; on choisit l'orientation « dans le sens trigonométrique ». En utilisant la définition des intégrales sur une courbe et curviligne, on obtient

$$\int_{\mathcal{C}} x \ ds = \frac{4\pi}{3} + 2\sqrt{3} \qquad \text{et} \qquad \int_{\mathcal{C}} x \ dx = -\frac{9}{2}.$$

Exercice 2
2.1) **On donne les fonctions F et f définies par**

$$F(z) = \frac{iz - 1}{z^3 - i}, \quad f(z) = z\cos\left(\frac{1}{z}\right)$$

(a) Où ces fonctions sont-elles holomorphes ?
(b) Quels sont leurs zéros ? Quelles en sont les multiplicités respectives ?
(c) Quelles sont leurs singularités isolées ? De quels types sont-elles ?
(d) Déterminer le résidu de f en chacune de ses singularités isolées.
(e) Déterminer le développement de Laurent de f en chacune de ses singularités isolées. (Sous forme de série et aussi en précisant les fonctions « classiques » h et H.)
(f) Calculer $\int_\Gamma f(z) \ dz$ lorsque Γ est le bord du carré centré à l'origine, de mesure de côté égale à 2, et dont les côtés sont parallèles aux axes (orientation : « aire à gauche »).

2.2) **Déterminer la valeur de l'intégrale suivante en utilisant la technique des fonctions holomorphes**

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{10}+\sin(x)}\ dx$$

Solution. 2.1) (a)

• La fonction F est une fraction rationnelle ; elle est donc holomorphe en dehors des zéros du dénominateur, c'est-à-dire dans $\mathbb{C} \setminus \{e^{i\pi/6}, e^{i5\pi/6}, -i\}$. Cependant, comme le polynôme du numérateur possède aussi $-i$ comme zéro, F se prolonge en une fonction holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus \{e^{i\pi/6}, e^{i5\pi/6}\}$.

• La fonction f est holomorphe dans $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ et ne se prolonge pas (cf ci-dessous, le « H » du développement de Laurent n'est pas nul). La seule singularité isolée est donc 0.

2.1) (b)

• La fonction F (prolongée) est une fraction rationnelle de numérateur constant ; elle n'a donc pas de zéro.

• La fonction f s'annule en tout complexe non nul dont l'inverse est zéro de la fonction cosinus ; les zéros sont donc $z_k = ((\pi/2)+k\pi)^{-1}$, $(k \in \mathbb{Z})$. De plus, comme $(Df)(z_k) = -z_k^{-1}\sin(z_k^{-1}) = (-1)^{k+1}z_k^{-1} \neq 0$, la multiplicité de chacun de ces zéros est égale à 1.

2.1) (c)

• Les singularités isolées de F sont les zéros du dénominateur, à savoir les complexes $z_0 = e^{i\pi/6}$ et $z_1 = e^{i5\pi/6}$. Les deux singularités sont des pôles d'ordre 1 car la fonction F s'écrit $F(z) = \frac{f_0(z)}{z-z_0}$, avec $f_0(z) = \frac{1}{z-z_1}$, f_0 holomorphe au voisinage de z_0 et $f_0(z_0) \neq 0$ (resp. $F(z) = \frac{f_1(z)}{z-z_1}$, avec $f_1(z) = \frac{1}{z-z_0}$, f_1 holomorphe au voisinage de z_1 et $f_1(z_1) \neq 0$).

2.1) (d) et (e). Comme on a $\cos(z) = \sum_{m=0}^{+\infty}(-1)^m \frac{z^{2m}}{(2m)!}$ $(z \in \mathbb{C})$, le développement de Laurent de f s'obtient directement : on a

$$f(z) = z + \sum_{m=1}^{+\infty}(-1)^m \frac{1}{z^{2m-1}(2m)!}$$

pour tout $z \neq 0$, avec

$$h(z) = z,\ z \in \mathbb{C} \quad \text{et} \quad H(Z) = \sum_{m=1}^{+\infty}(-1)^m \frac{Z^{2m-1}}{(2m)!},\ Z \in \mathbb{C}.$$

Le résidu de f est donc égal à $-1/2$ car c'est le coefficient de $1/z$ dans le développement de Laurent de cette fonction.

2.1) (f). La fonction f étant holomorphe dans $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ et Γ étant homotope, dans de domaine d'holomorphie, à toute circonférence centrée en 0, le théorème d'invariance par homotopie permet de dire que l'intégrale à calculer est en fait égale à $2i\pi$ fois le résidu de f en 0, donc à $-i\pi$.

On peut aussi appliquer le théorème des résidus.

2.2) C'est une intégrale d'un type traité lors des répétitions et/ou TD. On a ici

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{10}+\sin(x)}\ dx \ = \ \frac{2\pi}{3}$$

<u>Exercice 3</u>

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (1-x^2)\ \chi_{[-1,1]}(x)$$

(a) Si possible, déterminer la transformée de Fourier $(-)$ de f.

(b) En déduire la valeur de l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{x\cos x - \sin x}{x^3}\ dx$$

Solution. La fonction est intégrable sur $\mathbb{R}$ car elle est continue sur l'intervalle fermé borné $[-1,1]$ et nulle en dehors.
(a) Cela étant, on a

$$\mathcal{F}_y^- f = \int_{-1}^{1} e^{-ixy}(1-x^2)\ dx \ = \ 4\frac{\sin(y) - y\cos(y)}{y^3},\ y \neq 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_0^- f = \frac{4}{3}.$$

(b) La fonction à intégrer est en fait la transformée de Fourier obtenue précédemment (à une constante multiplicative près). C'est donc une fonction continue sur $\mathbb{R}$. De plus, comme celle-ci est en module majorée par $2/x^2$ pour x tel que $|x| \geq 1$, on en déduit qu'elle est intégrable. La question posée a donc bien un sens et on a directement

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{x\cos x - \sin x}{x^3}\ dx \ = \ -\frac{1}{4}\mathcal{F}_0^+\mathcal{F}^- f = -\frac{\pi}{2}f(0) = -\frac{\pi}{2}$$

en utilisant le théorème de Fourier et la continuité de f en 0.

<u>**Exercice 4**</u>

4.1) **On donne la fonction f par**

$$f(x) = \frac{1}{1+ix}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Si possible, déterminer la norme de f dans $L^2(\mathbb{R})$.

4.2) (a) Développer la fonction $x \mapsto \sin^2(x)$ en série trigonométrique de Fourier dans $L^2([0,\pi])$. Préciser quelle base vous utilisez.
(b) Dans $L^2([-\pi,\pi])$, on donne le développement suivant $x^2 = \sum_{m=0}^{+\infty} a_m \cos(mx)$ où les a_m $(m \in \mathbb{N})$ sont des réels. Que vaut le coefficient a_3 ?

Solution. 4.1) On a directement

$$|f(x)|^2 = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

La fonction $|f|^2$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ qui se comporte comme $x \mapsto 1/x^2$ à l'infini. Elle est donc intégrable sur $\mathbb{R}$ et ainsi on a bien $f \in L^2(\mathbb{R})$. On obtient également directement

$$\|f\| = \sqrt{\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\ dx} \ = \ \sqrt{2\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\ dx} \ = \ \sqrt{2\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg}(x)} = \sqrt{\pi}.$$

4.2) (a) On a $\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}e^{2ix} - \frac{1}{4}e^{-2ix}$. Ainsi, si on utilise la base orthonormée f_m $(m \in \mathbb{Z})$ de $L^2([0,\pi])$ donnée explicitement par $f_m(x) = \frac{e^{2imx}}{\sqrt{\pi}}$, on a immédiatement

$$\sin^2(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}f_0(x) - \frac{\sqrt{\pi}}{4}f_1(x) - \frac{\sqrt{\pi}}{4}f_{-1}(x).$$

Par unicité des coefficients, il s'agit bien du développement recherché.

4.2) (b) Les fonction $x \mapsto \cos(mx)$ $(m \in \mathbb{N})$ étant orthogonales deux à deux dans $L^2([-\pi,\pi])$, on a directement

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos(3x)\ dx \ = \ a_3\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(3x)\ dx.$$

Un calcul direct des deux intégrales conduit tout de suite à $a_3 = -\frac{4}{9}$.

<u>**Exercice 5**</u> **Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.**
5.1) La fonction $z \mapsto \exp(iz)$ est bornée dans $\mathbb{C}$

5.2) Il existe une fonction intégrable f dont la transformée de Fourier (-) est la fonction $y \mapsto \dfrac{y^2}{y^2+1}$.

Solution. 5.1) Faux car par exemple $\lim_{x\to-\infty,\ x\in\mathbb{R}} \exp(iix) = +\infty$.
5.2) Faux car la transformée de Fourier d'une fonction intégrable est une fonction qui tend vers 0 à l'infini alors que la fonction donnée tend vers 1 à l'infini.