Exercice 1. Cf Syllabus d'exercices (édition 2014-2015), exercice 8 page 54 pour l'énoncé; la solution se trouve plus loin dans le document

Exercice 2. a) $14i\pi$
b) et c) voir le corrigé du TD de décembre 2009 (via l'adresse http://www.afo.ulg.ac.be/fb/ens/2009-2010/inges/index.html)

Exercice 3. π (voir aussi le corrigé de décembre 2009) et $\dfrac{\pi}{8}$

Exercice 4. Pour des détails, voir le corrigé de décembre 2009
Cas de f_1
a) $\mathbb{C} \setminus \{0\}$
b) singularité isolée: 0; type: pôle d'ordre 1
d) et c):

$$f_1(z) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} z^{2m-1}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

$$H(Z) = Z \ (Z \in \mathbb{C}), \qquad h(z) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} z^{2m-1} = \frac{\sin(z) - z}{z^2} \ (z \in \mathbb{C})$$

Le résidu en 0 vaut donc 1
Cas de f_2
a) $\mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$
b) singularités isolées: $-i, i$; type: pôle d'ordre 1
c) le résidu en i vaut $-i/2$ et celui en $-i$ vaut $i/2$
Cas de f_3
a) $\mathbb{C} \setminus \{ik\pi \ : \ k \in \mathbb{Z}\}$ et admet un prolongement holomorphe en 0
b) singularités isolées: $ik\pi$ $(k \in \mathbb{Z}_0)$; type: pôle d'ordre 1
c) le résidu en $ik\pi$ (k entier non nul) est égal à $(-1)^k \sinh(k\pi)$

Exercice 5. 5.1) Faux[6]; exemple: $f \ z \mapsto \frac{1}{z}$
5.2) Vrai (car il s'agit en fait de la fonction exponentielle)
5.3) Faux (la série ne converge même pas pour $z = 0$ donc la fonction n'est même pas définie dans l'ensemble proposé)
5.4) Voir les notes à propos du TD de décembre 2013 (pages web) et aussi le syllabus du cours

Exercice 6. a) On a immédiatement

$$\sin(x) \ \cos(x) = \frac{1}{2} \sin(2x) = \frac{e^{2ix}}{4i} - \frac{e^{-2ix}}{4i}$$

b) $a_2 = 1$

FB, Version December 18, 2014 (V1: 16/12/14)

[6] par contre vrai si f est holomorphe dans $\mathbb{C}$, à cause du théorème de Liouville