ANALYSE II, 2013-2014, 2e bachelier ingénieur civil
Examen du 06 janvier 2014— Solutions (résumé)
Version : 14 janvier 2014 (V1 : 09/01/14)

THEORIE

Théorie 1

Soit un ouvert Ω de $\mathbb{C}$, soient $z_1, z_2, z_3 \in \Omega$ et soit une fonction f holomorphe dans $\Omega \setminus \{z_1, z_2, z_3\}$. Enoncer et démontrer le théorème des résidus dans ce cadre.

Théorie 2

2.1) Donner la définition de la transformée de Fourier d'une fonction intégrable dans $\mathbb{R}$. Enoncer ensuite le théorème de Fourier en exprimant toutes les transformées de Fourier explicitement (c'est-à-dire sous forme d'intégrale, en repassant à la définition).
2.2) Enoncer et démontrer ce que l'on appelle « théorème de transfert » dans le cadre des transformées de Fourier des fonctions intégrables.

Solution. Cf cours (syllabus et cours en amphi)

EXERCICES

Exercice 1

1.1) **On fixe un repère orthonormé de l'espace. On considère la fonction vectorielle $\vec{f}(x,y,z) = [x, z+x, z]$ et la surface $\mathcal{S}$ donnée par**

$$\mathcal{S} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2+y^2+z^2 = 1, \ x \geq 0, \ y \geq 0, z \geq 0, \ x \geq y\right\}$$

(a) Représenter cette surface $\mathcal{S}$.
(b) Déterminer un paramétrage injectif régulier (C_1) de cette surface $\mathcal{S}$, avec justifications.
(c) En spécifiant l'orientation que vous choisissez, déterminer la valeur de l'expression

$$\iint_{\mathcal{S}} rot(\vec{f}) \bullet \vec{n} \ d\sigma$$

où $\vec{n}$ désigne la normale unitaire à la surface orientée.

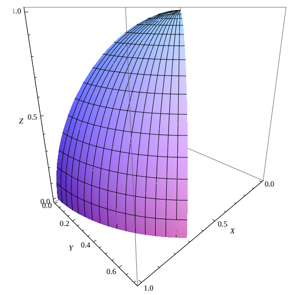
Solution. (a) et (b) : la surface est une partie de la sphère centrée à l'origine et de rayon 1 ; un paramétrage injectif et régulier de cette surface privée du point de coordonnées $(0,0,1)$ est donné par

$$\vec{\Phi}(\varphi,\theta) = [\cos\varphi \ \sin\theta, \sin\varphi\sin\theta, \cos\theta)], \qquad \varphi \in [0,\pi/4], \ \theta \in]0,\pi/2].$$

En effet, la fonction à valeurs vectorielles Φ appartient à $C_\infty(\mathbb{R}^2)$. Cette fonction est aussi injective sur $[0,\pi/4]\times]0,\pi/2]$ car cos est injectif sur $]0,\pi/2]$, sin ne s'annule en aucun point de cet intervalle et cos (et aussi sin) est injectif sur$[0,\pi/4]$.

Par ailleurs, d'une part, pour tout $(\varphi,\theta) \in [0,\pi/4] \times [0,\pi/2]$, les coordonnées $x = \cos\varphi \ \sin\theta$, $y = \sin\varphi\sin\theta$, $z = \cos\theta$ vérifient toutes les conditions pour que le point $P(x,y,z)$ appartienne à $\mathcal{S}$. D'autre part, étant donné un point $P(x,y,z)$ de $\mathcal{S}$ différent du point de coordonnées $(0,0,1)$, en utilisant les coordonnées polaires dans le plan, il existe $\varphi \in [0,\pi/4]$ tel que $x = \sqrt{1-z^2}\cos\varphi$ et $y = \sqrt{1-z^2}\sin\varphi$; comme $z \in [0,1[$, il existe aussi $\theta \in]0,\pi/2]$ tel que $z = \cos\theta$. Dès lors on obtient $(x,y,z) = (\cos\varphi \ \sin\theta, \sin\varphi\sin\theta, \cos\theta)$ avec $\varphi \in [0,\pi/4], \ \theta \in]0,\pi/2]$.

Une représentation de la surface est la suivante



(c) Un calcul direct du rotationnel (en utilisant la définition) donne

$$(rot\vec{f})(x,y,z) = [-1,0,1].$$

Un vecteur normal à la surface au point de paramètre φ,θ est

$$\vec{N}(\varphi,\theta) = D_\varphi\vec{\Phi}(\varphi,\theta) \wedge D_\theta\vec{\Phi}(\varphi,\theta) = -\sin\theta\ [\cos\varphi\sin\theta, \sin\varphi\sin\theta, \cos\theta].$$

Ce vecteur est orienté « vers l'intérieur » de la sphère. Cela étant, en utilisant la définition d'une intégrale sur une surface ainsi que l'orientation définie par la normale ci-dessus (auquel cas $\vec{n} = \vec{N}/\|\vec{N}\|$), on obtient successivement

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathcal{S}} rot(\vec{f}) \bullet \vec{n}\ d\sigma &= \int_0^{\pi/4}\int_0^{\pi/2} [-1,0,-1] \bullet \vec{N}(\varphi,\theta)\ d\varphi d\theta \\
&= \int_0^{\pi/4}\int_0^{\pi/2} \left(\cos\varphi\sin^2\theta - \frac{\sin(2\theta)}{2}\right)\ d\varphi d\theta \\
&= \left(\int_0^{\pi/4} \cos\varphi\ d\varphi)\right)\ \left(\int_0^{\pi/2} \sin^2\theta\ d\theta)\right) - \frac{\pi}{8}\int_0^{\pi/2} \sin(2\theta)\ d\theta \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\pi}{4}\ -\ \frac{\pi}{8} \\
&= \frac{\pi}{8}\left(\sqrt{2}-1\right).
\end{aligned}$$

1.2) **On fixe un repère orthonormé du plan et on considère la courbe d'équation cartésienne**

$$4x^2 + y^2 = 4.$$

(a) Représenter cette courbe.
(b) Si $\mathcal{C}$ désigne la partie de cette courbe située dans le quatrième quadrant, déterminer la valeur de l'intégrale suivante, en spécifiant l'orientation que vous choisissez

$$\int_{\mathcal{C}} xdy$$

Solution. Voir le corrigé de janvier 2011 ; note : cet exercice a aussi été fait au cours, mais c'était un autre quadrant qui était concerné.

Exercice 2

2.1) **On donne les fonctions f et g par**

$$f(z) = z^2 e^{\frac{1}{z}}, \quad g(z) = \frac{\cos z}{\sin z}$$

(a) Où ces fonctions sont-elles holomorphes ?
(b) Quels sont leurs zéros ? Quelles en sont les multiplicités respectives ?
(c) Quelles sont les singularités isolées ? De quels types sont-elles ?
(d) Déterminer le résidu en chacune des singularités isolées.
(e) Pour f, déterminer le développement en série de Laurent en chacune des singularités isolées. Préciser également les fonctions classiques ≪ h et H ≫.

Solution.
Cas de la fonction f.
La fonction f est holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ et n'a pas de zéro. Sa seule singularité isolée est 0 et elle est essentielle car la fonction ≪ H ≫ du développement de Laurent n'est pas un polynôme : on a en effet le développement de Laurent suivant

$$f(z) = z^2 \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m! z^m} = z^2 + z + \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{(m+2)! z^m}, \ z \in \mathbb{C}_0$$

et, avec les notations habituelles,

$$h(z) = z^2 + z + \frac{1}{2}, \ z \in \mathbb{C} \quad \text{et} \quad H(Z) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{Z^m}{(m+2)!}, \ Z \in \mathbb{C}.$$

Vu le développement précédent, on obtient directement

$$Res_0 f = \text{coefficient de } \frac{1}{z} \text{ dans le développement de Laurent } = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}.$$

Cas de la fonction g.
(a) Vu son expression (quotient de deux fonctions holomorphes dans le plan complexe), la fonction g est holomorphe dans le complémentaire des zéros du dénominateur, à savoir dans $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.
(b) Les zéros sont les complexes de Ω qui annulent le numérateur, à savoir $z_k := \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$. Chacun de ces zéros est un zéro simple car $Dg(z) = -1/\sin^2 z$ ne s'y annule pas.
(c),(d) Les singularités isolées de g sont les zéros du dénominateur, à savoir les complexes $w_k = k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$. Il s'agit donc de pôles. De plus, on a directement

$$\lim_{z \to w_k} (z - w_k) g(z) = \lim_{z \to w_k} \frac{\cos z}{\frac{\sin z}{z - w_k}} = \lim_{z \to w_k} \frac{\cos z}{\frac{\sin z - \sin w_k}{z - w_k}} = \frac{\cos w_k}{D \sin w_k} = 1$$

ce qui indique que w_k est un pôle d'ordre 1 pour g et que le résidu est égal à 1.

2.2) **Soit γ le bord du carré centré à l'origine, de côtés parallèles aux axes et de longueur de côté égale à 2. On considère qu'on parcourt ce bord ≪ aire à gauche ≫ et qu'on utilise un paramétrage injectif. Déterminer la valeur des intégrales suivantes**

$$(a)\ \int_\gamma \Re z\ dz, \qquad (b)\ \int_\gamma \frac{1}{2z-i}dz$$

Solution. En prenant une orientation ≪ aire à gauche ≫, le bord γ du carré est constitué de la superposition de quatre segments dont des paramétrages injectifs sont donnés par

$$1+it,\ t\in[-1,1]; \quad i-t,\ t\in[-1,1]; \quad -1-it,\ t\in[-1,1]; \quad -i+t,\ t\in[-1,1].$$

Pour la première intégrale, on obtient directement

$$\int_\gamma \Re z\ dz = \int_{-1}^1 idt + \int_{-1}^1 tdt + \int_{-1}^1 idt + \int_{-1}^1 tdt = 4i.$$

Comme $z \mapsto \dfrac{1}{2z-i}$ est holomorphe dans le complémentaire de $\frac{i}{2}$, la seconde intégrale s'obtient directement en utilisant soit la représentation intégrale de Cauchy, soit le théorème des résidus

$$\int_\gamma \frac{1}{2z-i}dz = i\pi.$$

2.3) **Déterminer la valeur de l'intégrale suivante en utilisant la technique des fonctions holomorphes.**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^6+8}\ dx$$

Solution. La fonction à intégrer est bien intégrable sur $\mathbb{R}$ car elle y est continue et, après, multiplication par x^2, elle admet une limite finie en $+\infty$ et en $-\infty$. Cela étant, en utilisant le changement de variables $x=\sqrt{2}t$ entre $\mathbb{R}$ et lui-même, on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^6+8}\ dx \ = \ \frac{\sqrt{2}}{8}\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{t^6+1}dt.$$

Pour la suite des calculs, nous renvoyons aux séances de répétitions (cet exercice a été résolu explicitement à l'occasion d'une séance) et aussi au corrigé de janvier 2011. On trouve finalement

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^6+8}\ dx \ = \ \frac{\sqrt{2}}{12}\pi$$

<u>Exercice 3</u>

3.1) **Soient les fonctions f,g (d'une variable réelle) données explicitement par**

$$f(x)=\sin(x)\ \chi_{[-\pi,\pi]}(x), \qquad g(x)=\frac{\sin(\pi x)}{x^2-1}.$$

(a) Si possible, déterminer les transformées de Fourier (+ et −) de f et g.
(b) Si possible, en déduire la valeur de l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^2(\pi x)}{(x^2-1)^2}\ dx.$$

Solution. (a) et (b) La fonction f est intégrable sur $\mathbb{R}$ puiqu'elle est nulle en dehors de $[-\pi,\pi]$ (intervalle fermé borné) et qu'elle est continue sur cet intervalle. La fonction g est aussi intégrable sur $\mathbb{R}$ puisqu'elle se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et que, en module, elle est majorée par la fonction intégrable $x \mapsto C/(x^2+1)$ où C est une constante strictement positive. Dès lors, les transformées demandées existent.

Cela étant, on a successivement, pour tout $x \neq \pm 1$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_x^{\pm} f &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{\pm ixy} \sin(y)\ dy = \pm 2i \int_0^{\pi} \sin(xy)\ \sin(y)\ dy \\
&= \mp i \int_0^{\pi} (\cos(xy+y) - \cos(xy-y))\ dy \\
&= \mp i \left(\frac{-\sin(x\pi)}{x+1} + \frac{\sin(x\pi)}{x-1} \right) \\
&= \mp \frac{2i\sin(x\pi)}{x^2-1} \\
&= \mp 2ig(x).
\end{aligned}$$

Il s'ensuit donc

$$\mathcal{F}_x^{\mp} g = \frac{\pm i}{2} \mathcal{F}_x^{\mp} \mathcal{F}^{\pm} f = \pm i\pi f(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

et aussi

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^2(\pi x)}{(x^2-1)^2}\ dx = \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}_x^{+} f\ \mathcal{F}_x^{-} f\ dx \ = \ \frac{\pi}{2} \int_{\mathbb{R}} f^2(x)\ dx = \pi \int_0^{\pi} \sin^2 x\ dx = \frac{\pi^2}{2}.$$

3.2) **Pour tout naturel positif ou nul m, on pose $u_m(x) = \cos(mx),\ x \in \mathbb{R}$. Montrer que les éléments de la suite u_m $(m \in \mathbb{N})$ sont orthogonaux deux à deux dans $L^2([-\pi,\pi])$ et calculer la norme de u_m dans le même espace, quel que soit m.**

Solution. Il s'agit de calculs directs d'intégrales de fonctions trigonométriques : pour tous naturels non nuls m et n, avec $m \neq n$, on a

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\ dx = 0, \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\ \cos(nx)\ dx = 0$$

et

$$\|u_m\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(mx)\ dx} = \sqrt{\pi}, \qquad \|u_0\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} 1 dx} = \sqrt{2\pi}$$

Exercice 4 Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.
4.1) La fonction $z \mapsto \exp(iz)$ est bornée dans $\mathbb{C}$

4.2) Soient un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ et $z_0 \in \Omega$. Si f est une fonction holomorphe dans $\Omega \setminus \{z_0\}$ qui ne s'annule en aucun point et si z_0 est une singularité essentielle pour f, alors z_0 est aussi une singularité essentielle pour $1/f$.

Solution. 4.1) Faux.
Par exemple, il suffit de noter que $\lim_{x\in\mathbb{R}, x\to-\infty} \exp(i(ix)) = \lim_{x\in\mathbb{R}, x\to-\infty} \exp(-x) = +\infty$.
4.2) Vrai.
Comme f est une fonction holomorphe dans $\Omega \setminus \{z_0\}$ qui ne s'annule en aucun point, la fonction $1/f$ est aussi holomorphe dans $\Omega \setminus \{z_0\}$. Si la singularité isolée z_0 est un pôle pour $1/f$, alors il existe un naturel p et une fonction g, holomorphe au voisinage de z_0 (compris) qui ne s'annule pas en z_0, telle que

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{g(z)}{(z-z_0)^p}$$

dans un voisinage de z_0 (exclu). Ainsi, on en déduit que

$$f(z) = (z-z_0)^p\ \ (1/g(z))$$

dans un voisinage de z_0 (compris), donc que f se prolonge en une fonction holomorphe en z_0, ce qui est contradictoire.

Note : on peut aussi utiliser directement la caractérisation des singularités essentielles à l'aide des limites.